

第二種積分方程式に対する Sinc 数値計算法

岡山 友昭

概要

本論文では、Sinc 数値計算法に基づく、第二種積分方程式の数値解法を取り扱う。第二種積分方程式は広く応用に現れる方程式であるが、一般に方程式の解は解析的には求められないため、数値計算によって近似的に解を求める必要がある。Sinc 数値計算法の利点は、収束が非常に速いこと、また端点に特異性がある場合にも頑健であることである。実際に近年、第二種積分方程式に対して Sinc 数値計算法に基づく数値解法が提案されてきており、またその高性能さを示す数値実験結果が得られている。

本論文における主な目的は、実用的な視点からこれらの既存のスキームを改善すること、および新たなスキームを提案することである。既存のスキームの多くに共通する議論すべき点は、大きく分けて、次の二つである。

1. スキームを実装するにあたり、方程式の解の情報（正則領域や端点の値）を必要とする。
2. 仮に正当なスキームを実装できたとしても、数値解が真の解に収束する保証がない。

本論文では、これらを理論解析に基づいて解決する。1つ目の論点に関しては、スキームに必要な情報は既知の関数のもので代用できることを理論的に示した上で、方程式の解が不明であっても実行できるようスキームを修正する。2つ目の論点に関しては、修正したスキームに対して数値解が真の解に収束することを理論的に示すだけでなく、その収束次数も明らかにする。また、これまでにスキームが提案されていない場合は、以上の成果に基づき、新たにスキームを提案する。

さらに本論文では、スキームの数値解の誤差を定量的に評価する方法を提案する。実用の観点、特に精度保証付き数値計算の観点からは、数値解の誤差が許容誤差の範囲内であるかどうかを判定する方法が望まれるが、現段階ではそのような方法は提案されていない。これは、Sinc 数値計算法全般のこれまでの誤差解析において、不等式の形で収束性は解析されているものの、式の中に未評価の定数が含まれているためである。本論文では、これらの定数を明示的に評価する。

キーワード Volterra 積分方程式, Fredholm 積分方程式, Sinc 数値計算法, SE 変換, DE 変換

目次

第 1 章	はじめに	1
1.1	第二種積分方程式とその応用分野	1
1.2	多項式近似に基づく数値解法	2
1.3	Sinc 数値計算法による数値解法	3
1.4	本論文の成果	6
1.5	本論文の構成	8
第 2 章	Sinc 数値計算法の基礎	9
2.1	Sinc 関数近似理論の歴史	9
2.2	Sinc 関数近似より導出される近似公式	15
2.3	既存の誤差解析結果	18
2.4	新規の誤差解析結果	22
第 3 章	Volterra 積分方程式に対する Sinc-Nyström 法	33
3.1	Muhammad et al. による Sinc-Nyström 法	33
3.2	Muhammad et al. の結果に関する議論	35
3.3	主結果：Sinc-Nyström 法に対する理論解析	35
3.4	数値実験	37
3.5	証明：解 u の性質の解析	44
3.6	証明：スキームの可解性と収束性の解析	47
第 4 章	Fredholm 積分方程式に対する Sinc-Nyström 法	55
4.1	Rashidinia-Zarebnia/Muhammad et al. による Sinc-Nyström 法	55
4.2	Rashidinia-Zarebnia/Muhammad et al. の結果に関する議論	57
4.3	主結果：Sinc-Nyström 法に対する理論解析	58
4.4	数値実験	59
4.5	証明：解 u の性質の解析	65
4.6	証明：スキームの可解性と収束性の解析	66
第 5 章	Volterra 積分方程式に対する Sinc 選点法	73

5.1	Rashidinia–Zarebnia による SE-Sinc 選点法	73
5.2	Rashidinia–Zarebnia の結果に関する議論と改良のアイデア	75
5.3	主結果：Sinc 選点法の改良とその理論解析	77
5.4	数値実験	80
5.5	証明：解 u の性質の解析	81
5.6	証明：スキームの可解性と収束性の解析	82
第 6 章	Fredholm 積分方程式に対する Sinc 選点法	89
6.1	Rashidinia–Zarebnia による SE-Sinc 選点法	89
6.2	Rashidinia–Zarebnia の結果に関する議論と改良のアイデア	90
6.3	主結果：Sinc 選点法の改良とその理論解析	91
6.4	数値実験	93
6.5	証明：解 u の性質の解析	95
6.6	証明：スキームの可解性と収束性の解析	96
第 7 章	弱特異核を持つ Volterra 積分方程式に対する Sinc 選点法	102
7.1	Riley/Mori et al. による Sinc 選点法	102
7.2	Riley/Mori et al. の結果に関する議論と改良のアイデア	106
7.3	主結果：Sinc 選点法の改良とその理論解析	108
7.4	数値実験	111
7.5	証明：解 u の性質の解析	113
7.6	証明：スキームの可解性と収束性の解析	118
第 8 章	弱特異核を持つ Fredholm 積分方程式に対する Sinc 選点法	136
8.1	岡山による既存の Sinc 選点法	136
8.2	岡山の既存の結果に関する議論と改良のアイデア	138
8.3	主結果：Sinc 選点法の改良とその理論解析	140
8.4	数値実験	142
8.5	証明：解 u の性質の解析	145
8.6	証明：スキームの可解性と収束性の解析	148
第 9 章	定数を明示的に表した Sinc 数値計算法の基礎定理	154
9.1	動機：精度保証付き数値計算	154
9.2	主結果：定数を明示的に表した誤差評価	155
9.3	数値実験	157
9.4	証明	158
9.5	自然数 n を刻み幅 h に対して定める方法	174
第 10 章	Fredholm 積分方程式に対する Sinc-Nyström 法の事前誤差評価と事後誤	

	差評価	177
10.1	事前誤差評価と事後誤差評価の使い分けの指針	177
10.2	主結果：Sinc-Nyström 法に対する事前誤差評価と事後誤差評価	177
10.3	数値実験	179
10.4	証明	179
第 11 章	おわりに	180
	謝辞	182
	参考文献	183
付録 A	不定積分近似に対する新たなアプローチ	194
A.1	動機：Abel 核を持つ積分の近似	194
A.2	SE-Sinc 積分・DE-Sinc 積分による数値不定積分	195
A.3	不定型畳み込みの近似公式	204

第 1 章

はじめに

1.1 第二種積分方程式とその応用分野

本論文では、次の形の Volterra 積分方程式：

$$\lambda u(t) - \int_a^t k(t, s)u(s) ds = g(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (1.1)$$

および次の形の Fredholm 積分方程式：

$$\lambda u(t) - \int_a^b k(t, s)u(s) ds = g(t), \quad a \leq t \leq b \quad (1.2)$$

の数値計算法について考える．いずれも線形の方程式である．関数 g と，積分核と呼ばれる関数 k は，なめらかな既知の関数で， u が求めるべき未知関数である．また， λ は既知の定数で，本論文では $\lambda \neq 0$ の場合，すなわち第二種積分方程式の場合を考える^{*1}．微分方程式の初期値問題や境界値問題のいくつかはこれらの積分方程式に変形でき，方程式 (1.1) と (1.2) は，それらの問題も含んだものと考えることができる．これらの積分方程式の理論的性質については，古く（19 世紀末～20 世紀初頭）から様々な研究がなされてきたが [40, 154]，応用においても，物理・化学・生物学など幅広い分野で現れることが近年にわたって知られてきた [5, 27, 28, 110]．例えば Volterra 積分方程式は，再生過程（Poisson 過程の一般化）を記述する再生方程式：

$$u(t) - \int_0^t f(t-s)u(s) ds = F(t) \quad (1.3)$$

に現れる [38, 56]．ここで F は累積分布関数， f は確率密度関数で，求めるべき関数 u は平均生起数を表し，再生関数と呼ばれる．他にも Volterra 積分方程式は，半導体の問題 [71, 121, 150]，波動現象 [54] などにも現れる．また Fredholm 積分方程式は，静電気学 [39, 65] や中性子・光子の運動 [55] などにも現れる．静電気学からの例を挙げると，同じ電荷を蓄えた半径 r の二つの導体円盤を，距離 cr だけ離して向かい合わせに置いた場合に生じる電場 u は，方程式

$$u(t) + \int_{-1}^1 \frac{c}{\pi\{c^2 + (t-s)^2\}} u(s) ds = 1 \quad (1.4)$$

^{*1} $\lambda = 0$ の場合は第一種積分方程式，また λ が t の関数である場合は第三種積分方程式と呼ばれる．

2 第1章 はじめに

で記述され、この方程式は Love's equation と呼ばれている。

上では積分核がなめらかな場合を仮定したが、積分核の性質が悪い場合、例えば非有界な点が存在する場合も、応用上しばしば現れる。被積分関数に非有界な点が存在するが、積分可能である（積分が有限確定値を持つ）場合、その積分核を弱特異核と呼ぶ。特に本論文では、代数的な弱特異核 $(t-s)^{p-1}$ （Abel 核と呼ばれる）をもつ第二種 Volterra 積分方程式：

$$\lambda u(t) - \int_a^t (t-s)^{p-1} k(t,s) u(s) ds = g(t), \quad a \leq t \leq b, \quad (1.5)$$

および第二種 Fredholm 積分方程式：

$$\lambda u(t) - \int_a^b |t-s|^{p-1} k(t,s) u(s) ds = g(t), \quad a \leq t \leq b \quad (1.6)$$

も取り扱う。ただし p は $0 < p < 1$ をみたす定数である。方程式 (1.5) は、立体学 [64]、逆問題 [46]、熱伝導問題 [43] などの応用に現れる方程式で、特に $k(t,s) = 1$ の場合、第二種 Abel 積分方程式とも呼ばれる*²。また方程式 (1.6) も、ディリクレ問題 [122] や高分子化合物の流体力学 [59]、放射伝達・放射輸送 [115, 123] などに現れる。特に $k(t,s) = 1$ かつ $p = 1/2$ の場合、しばしば Kirkwood–Riseman 方程式と呼ばれる。

1.2 多項式近似に基づく数値解法

方程式 (1.1)–(1.6) の解は一般には解析的には求まらない。そのため計算機が普及しはじめた頃より、数値計算によって近似的に解を求める方法が研究され、ソフトウェア・ライブラリなども作られるようになった [32, 68, 69]。現在でも継続して多くの研究が報告され続けており、Volterra 積分方程式に対しては主に Brunner [12, 14, 15, 17] によって、Fredholm 積分方程式に対しては主に Atkinson [7, 8] によって、サーベイ論文や書籍が定期的に出されている。近年における他の書籍としては、Hackbusch [48]、Golberg–Chen [42]、Kytke–Puri [62]、Burton [18] が挙げられる。

これらの論文・書籍で多く取り上げられ、実用上もよく用いられているのは、スプライン補間などの多項式近似を用いる方法である。多項式は理論的にもアルゴリズム的にも比較的取り扱いやすく、また Matlab・Scilab などにも標準で多項式近似ツールが用意されているため、手軽であることがその要因であろう。現在では、例えば Fredholm 積分方程式に対する Matlab ライブラリが実装・公開されるなど [9]、ユーザーがさらに手軽に利用できる環境が整いつつある。これらの多項式近似を用いる方法は、一般的にサンプリング数 m の増加に対して、誤差が $O(m^{-2})$ や $O(m^{-3})$ のように多項式オーダーで減少する。要求精度がさほど高くない場合にはこれでも十分であり、上述の利便性と併せて、これらのアルゴリズムは実用的であると言える。

*² Abel [2, 3] 自身が取り扱った方程式は第一種のため、単に「Abel 積分方程式」と呼ぶ場合、第一種を指すことが多い。

一方で、高い精度が必要な場合には、多項式的に減衰する誤差を小さく抑えるために m を大きく取る必要があり、計算時間が長くなる恐れがある。これを防ぐには用いる多項式の次数を上げればよいが（このとき $O(m^{-q})$ の q が大きくなる）、それに伴って実装が複雑になる上、方程式 (1.5) や (1.6) のように積分核に特異性があるような場合には、多項式の次数を上げても収束速度が変化しないという問題が知られている（Volterra 型 [16]・Fredholm 型 [153] のいずれの場合でも同様の問題が起こる）。これは、いくら既知関数 g や k がなめらかであっても、弱特異核の影響により、解 u は一般に端点で微分不可能という特異性をもつからである（Volterra 型 [34, 50, 66, 70]・Fredholm 型 [45, 107, 116, 122, 152]）。この問題に対処するには、さらに様々な技巧を凝らす必要がある。よく用いられている工夫として、区間を等間隔刻みではなく、端点に近づくにつれて刻みが細くなるよう、等比刻みで分割する方法がある（Volterra 型 [13]・Fredholm 型 [44, 123, 153]）。刻みの比を大きくすると同時に多項式の次数を上げることで、理論的には収束次数を改善できる。しかし、実際には刻み比の増大に伴って丸め誤差の影響が深刻に現れ、また多項式次数の向上に伴って最終的に解く連立一次方程式の条件数が急激に増加してしまう難点が指摘されている（Volterra 型 [102, 103]・Fredholm 型 [72, 104]）。さらにこれらの問題を緩和するために、ハイブリッドな方法（Volterra 型 [21]・Fredholm 型 [22]）が提案されているが、このように手法が複雑化してくると、多項式近似の利点であった手軽さは失われてしまう。現状では、決定版と呼べる解決方法はいまだ見つかっていないようである。またこのような様々な工夫にも拘わらず、収束次数はやはり多項式オーダーに留まっていることも注意しておきたい。

1.3 Sinc 数値計算法による数値解法

上記の問題点を克服する一案として、本論文では Sinc 数値計算法に基づく数値解法を考える。Sinc 数値計算法は、Sinc 関数近似と呼ばれる

$$F(x) \approx \sum_{j=-N}^N F(jh) \frac{\sin \pi(x/h - j)}{\pi(x/h - j)}, \quad x \in \mathbb{R} \quad (1.7)$$

という近似式より導出される数値計算法である。ここで $h > 0$ はサンプリング点の間隔（刻み幅と呼ぶ）であり、第 2 章で詳述するように、 N に依存して適切に定める。Sinc 関数近似は、適切な変数変換と組み合わせることで高い性能を持つことが知られており、実際にある種の最適性も示されている [132, 140]。例えば、片側サンプリング数 N に対する典型的な収束次数（例えば関数近似そのものや数値積分公式に関して）は、 $\tanh$ 変換と呼ばれる一重指数関数型の変換（Single-Exponential 変換；以下 SE 変換）を用いる Sinc 数値計算法では $O(\exp(-c_1\sqrt{N}))$ である。この方法は主に Stenger [129–137] により精力的に研究されてきた。さらに、Mori [74–79] や Sugihara [138–141] などの日本グループにより開発・研究されてきた二重指数関数型変換（Double-Exponential 変換；以下 DE 変換）と組み合わせる Sinc 数値計算法では、典型的な収束速度はさらに速く、 $O(\exp(-c_2 N / \log N))$ である。いずれの計算法も収束次数は指数オーダーであり、 $O(m^{-2})$ のような多項式オーダーの収束に比べて非

4 第1章 はじめに

常に収束が速い。さらに、被近似関数がなめらかな場合だけでなく、端点に特異性がある場合にも同等の収束性能を持つという利点がある。この際、刻み幅を等比刻みにするような工夫の必要はなく、特異性がある場合もない場合も統一的に取り扱うことができる。

多項式近似との基本性能を比較するために、区間 $[0, 1]$ 上で、関数 $f(t) = t^{1/2}(1-t)^{3/4}$ を近似した結果を、Scilab のルーチン「smooth」によるスプライン補間と、SE 変換と組み合わせた Sinc 関数近似、DE 変換と組み合わせた Sinc 関数近似で比較したものを図 1.1 に示す。スプライン補間の誤差の減少は直線的（これは多項式オーダーであることを意味する）で遅いのに対し、Sinc 関数近似の誤差の減少は曲線を描き（これは指数オーダーであることを意味する）、非常に収束が速いことがわかる。

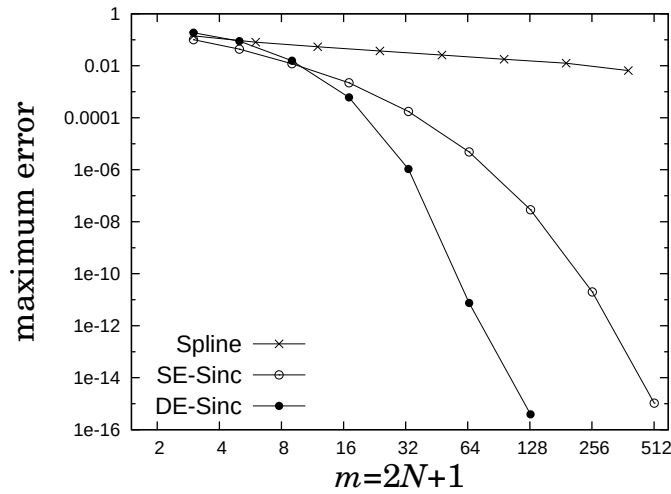


図 1.1 区間 $[0, 1]$ 上で、関数 $f(t) = t^{1/2}(1-t)^{3/4}$ を近似した誤差の比較。横軸の m は関数 f を評価した回数、縦軸は区間の 1000 等分割点上の最大誤差を表す。

手軽さという意味では、和と積だけで計算できる多項式に比べ、Sinc 関数近似は基底関数に三角関数や除算を含むため、やや手間がかかるものの、収束が非常に速いために、要求精度が高い場合には結果として許容誤差に達するまでの計算時間は短くなることが多い。Sinc 数値計算法は、現在では微分方程式の初期値問題 [24, 84]、二階微分方程式の境界値問題 [11, 133, 139]、四階微分方程式の境界値問題 [80, 85, 86, 127]、特異摂動問題 [37, 77] などに対しても拡張されており、やはり $O(\exp(-c_1\sqrt{N}))$ や $O(\exp(-c_2N/\log N))$ の収束性が報告されている。

以上の考察に基づき、方程式 (1.1) と (1.2)、および方程式 (1.5) と (1.6) に対しても、これまでに Sinc 数値計算法に基づくいくつかの数値解法（以下、Sinc スキーム）が提案されており、数値実験により実際に $O(\exp(-c_1\sqrt{N}))$ や $O(\exp(-c_2N/\log N))$ の収束性が観察され、その有効性が確認されている [78, 82, 89, 112–114, 117, 118]。ただしこれらの研究結果にはさらに改良できる点が存在する。大きく分けて、

- 論点 1. スキームの実装に、方程式の解の情報（正則領域や端点の値）を必要とする点。
- 論点 2. 数値解が真の解に収束する保証が理論的になされていない点。

の二点である。詳しくは次段で述べる。既存の研究結果の現状を、表 1.1 にまとめておく。表中、「スキーム提案・数値的検証」は Sinc スキームの提案と数値実験による収束次数の確認の有無を表し、「論点 1・2」は、上に述べた論点がそれぞれ解決済みであるかどうかを表す。たとえば表の第一行は、方程式 (1.1) に対して、Muhammad et al. [82] により Sinc-Nyström 法と SE 変換に基づく Sinc スキームが提案され（この詳細については該当する第 3 章で説明する）、数値実験による収束次数の確認も終わっているが、この Sinc スキームに関する論点 1・2 は未解決であることを表す。また、例えば第四行のように空欄であるところは、方程式 (1.1) に対して、Sinc 選点法と DE 変換に基づく Sinc スキームが、これまでまだ提案されていないことを表す。

以下、上述の「論点 1・2」について詳述する。論点 1 は、スキームの実装にまつわるものである。実は既存研究における Sinc スキームの多くは、方程式の解 u に依存して設計されているという難点がある。特に顕著なものは Rashidinia-Zarebnia [112, 114] による、SE 変換を用いた Sinc 選点法によるスキームであり、このスキームでは方程式の解が端点 ($t = a, b$) で 0 であるかどうか依存して、用いる基底関数を選択している。しかし解 u はまさに求めるべき解であり、当然ながら端点で 0 であるかどうかは解く前には分からないから、このスキームは実装が困難（もしくは不可能）である。また、この Rashidinia-Zarebnia スキームを含め、既存のすべての Sinc スキームには、刻み幅 h の決定式の中に性能チューニングのためのパラメータが含まれており、これらは解 u に依存して定められなければならない。例えば第 3 章で述べる Sinc-Nyström 法では、あるパラメータ d を用いて、SE 変換を用いる場合には

$$h = \sqrt{\frac{\pi d}{N}} \quad (1.8)$$

と定め、DE 変換を用いる場合には

$$h = \frac{\log(2dN)}{N} \quad (1.9)$$

と定めている。ここに現れる d は、方程式 (1.1) の積分の被積分関数 $k(t, \cdot)u(\cdot)$ の正則領域の広さを表すパラメータであり、 d の値を求めるためには、関数 k と u の正則領域を求めなければならない。ところが u は未知の関数であるので、単純には正しい d の値を求めることはできない。また、他の値で d を定めれば、スキームを実行することは可能だが、このパラメータ設定如何により、Sinc スキームの性能は著しく変化する（第 3 章の図 3.1–3.5 を参照）。そのため、適切なパラメータ推定方法が必要であるが、これまでこの点は議論されず、パラメータ調整はすべてユーザーに任されているのが現状であった。

論点 2 は、スキームの理論評価にまつわるものである。既存スキームにおいては、仮に解 u の端点の値やチューニングパラメータが既知であり、理想的な実装が可能であるとしても、 $N \rightarrow \infty$ でスキームが可解である保証や、近似解が収束する保証が、理論的に与えられていない難点がある。先行研究では、一定の誤差解析を行っているものもあるが、スキームの可解性は暗黙に仮定されており、さらに誤差の評価式の中に、 N に対する挙動が未評価の項が残されている。例えば第 3 章で述べる Sinc-Nyström 法では、DE 変換を用いる場合に限り、数値解

6 第 1 章 はじめに

u_N の誤差は

$$\max_{t \in [a, b]} |u(t) - u_N(t)| \leq (C\sqrt{N}\|(\Omega_N)^{-1}\|_2 + C') \frac{\log N}{N} e^{-\pi d N / \log(2dN)} \quad (1.10)$$

と評価されている．ここで C, C' は N に依存しない定数であり， Ω_N はスキームで解く連立 1 次方程式の係数行列を表す．このような評価が与えられているが， $\|(\Omega_N)^{-1}\|_2$ は N に依存する項であり，この項の N に対する挙動を明らかにしない限り，数値解の収束を示すことはできない．さらに， $(\Omega_N)^{-1}$ が評価式に現れているが，そもそも Ω_N に逆行列が存在することも明らかではなく，これはスキームの可解性として別途証明すべきことである．他の Sinc スキームにおける誤差評価においても，ほとんどの場合に連立 1 次方程式の逆行列の項が評価式に含まれている（そうでない場合は，不自然な仮定が課されている）．そのため，Sinc スキームの可解性や収束性は，実際にスキームを実行してみて，有限の N の範囲で観察することしかできなかった．先行研究における $O(\exp(-c_1\sqrt{N}))$ や $O(\exp(-c_2N/\log N))$ といった収束次数の主張は，全てあくまで数値実験の観察に基づくものである．理論的興味からも，またユーザーに安全なスキームを提供するという実用上の意味においても，この点を理論的に明らかにする必要がある．

表 1.1 第二種積分方程式に対する既存の Sinc スキームの研究の一覧．

論点 1：スキームの実装に，方程式の解の情報（正則領域や端点の値）を必要とする点．

論点 2：数値解が真の解に収束する保証が理論的になされていない点．

方程式	離散化手法	変数変換	スキーム提案・数値的検証	論点 1	論点 2	該当章
(1.1)	Sinc-Nyström 法	SE 変換	Muhammad et al. [82]	未解決	未解決	第 3 章
		DE 変換	Muhammad et al. [82]	未解決	未解決	
	Sinc 選点法	SE 変換	Rashidinia-Zarebnia [114]	未解決	未解決	第 5 章
		DE 変換				
(1.2)	Sinc-Nyström 法	SE 変換	Rashidinia-Zarebnia [113]	未解決	未解決	第 4 章
		DE 変換	Muhammad et al. [82]	未解決	未解決	
	Sinc 選点法	SE 変換	Rashidinia-Zarebnia [112]	未解決	未解決	第 6 章
		DE 変換				
(1.5)	Sinc 選点法	SE 変換	Riley [117, 118]	未解決	未解決	第 7 章
		DE 変換	Mori et al. [78]	未解決	未解決	
(1.6)	Sinc 選点法	SE 変換	岡山（修士論文）[89]	解決済	未解決	第 8 章
		DE 変換	岡山（修士論文）[89]	解決済	未解決	

1.4 本論文の成果

本論文の主たる目的は，以上の困難を解決し，表 1.1 を完全なものに置き換えることにある．より具体的には，積分方程式 (1.1)–(1.6) に対する既存の Sinc スキームとその理論評価を改良し，さらに提案されていないものについては，新たな Sinc スキームの提案を行う．

論点 1・2 は、以下のように理論解析に基づいて解決する。論点 1 に関しては、Sinc-Nyström 法の場合は、スキームに必要な情報は既知の関数のもので代用できることを理論的に示す。さらに Sinc 選点法の場合は、スキームを修正した上で同様であることを示す。これらの貢献によって、方程式の解が未知であってもスキームが実装可能になる。ここで理論解析の要となるのは、Volterra 積分方程式の場合は縮小写像の原理、Fredholm 積分方程式の場合は Fredholm の択一定理という、関数解析ではよく知られている定理である。ただし、これらの定理を Sinc-Nyström 法の場合に適用するアイディアは、本論文で初めて提示されるものである。また、Sinc-Nyström 法において仮定される関数空間は、一様ノルムに関して Banach 空間となるが、Sinc 選点法において仮定される関数空間は Banach 空間にならないため、Sinc 選点法の場合にはこれらの定理は素直には適用できないという困難がある。そこで本論文では、Sinc-Nyström 法における結果を経由して、Sinc 選点法の場合の解析を行うというアプローチをとる。このアイディアも本論文で初めて提示されるものである。

論点 2 に関しては、Sinc-Nyström 法や修正した Sinc 選点法によるスキームに対し、 $N \rightarrow \infty$ において数値解が一意に存在し、真の解に収束すること、そしてその収束次数は、 $O(\exp(-c_1\sqrt{N}))$ や $O(\exp(-c_2N/\log N))$ であることを理論的に示す。この解析における本論文の特徴は、論点 1 で考えた関数空間ではなく、基本的に区間 $[a, b]$ 上の連続関数空間 $C([a, b])$ で議論を進める点にある。これは、方程式の解 u と近似解 u_N の誤差を評価する際には、複素平面上の一様ノルムではなく、実軸区間 $[a, b]$ 上の一様ノルム：

$$\max_{t \in [a, b]} |u(t) - u_N(t)| = \|u - u_N\|_{C([a, b])} \quad (1.11)$$

で評価する必要があるためである。そのため、関数 g や k などが微分可能であっても、作用素の解析における関数空間は $C([a, b])$ で考える。ただし、これには大きな困難がある。例えば、 $C([a, b])$ をそれ自身に写すある作用素 $\mathcal{X}$ に対し、同様の Sinc 近似作用素 $\mathcal{X}_N$ のノルム収束性を示すには、定義：

$$\|\mathcal{X} - \mathcal{X}_N\|_{\mathcal{L}(C([a, b]), C([a, b]))} = \sup_{\substack{f \in C([a, b]) \\ f \neq 0}} \frac{\|\mathcal{X}f - \mathcal{X}_Nf\|_{C([a, b])}}{\|f\|_{C([a, b])}} \quad (1.12)$$

の右辺の $N \rightarrow \infty$ での収束性を示す必要があるが、Sinc 関数近似の誤差解析は（第 2 章に示すように）複素平面上の関数空間で考えるのが標準的である。本論文における技術的貢献は、これらの結果と、式 (1.12) の右辺のような $f \in C([a, b])$ である項の評価を結びつけたところにある。

以上の成果を踏まえ、本論文において表 1.1 は表 1.2 のように改善される。表 1.2 中、太字で記した箇所が本論文で改良、もしくは新たに提案された部分である。

さらに補助的な目的として、本論文では、スキームの数値解の誤差を定量的に評価するための基礎研究を行う。実用の観点、特に精度保証付き数値計算の観点からは、数値解の誤差が許容誤差の範囲内であるかどうかを判定する方法が望まれるが、現段階ではそのような方法は確立されていない。これは、Sinc 数値計算法全般の誤差解析において、不等式の形で収束性は解

8 第1章 はじめに

析されているものの、式の中に未評価の定数が残されているためである。本論文では、これらの定数の明示的評価が可能であり、簡単な精度保証に援用可能であることを示す。

表 1.2 第二種積分方程式に対する Sinc スキームにおける本論文の貢献（太字部分）。
論点 1：スキームの実装に、方程式の解の情報（正則領域や端点の値）を必要とする点。
論点 2：数値解が真の解に収束する保証が理論的になされていない点。

方程式	離散化手法	変数変換	スキーム提案・数値的検証	論点 1	論点 2	該当章
(1.1)	Sinc-Nyström 法	SE 変換	Muhammad et al. [82]	解決	解決	第 3 章
		DE 変換	Muhammad et al. [82]	解決	解決	
	Sinc 選点法	SE 変換	Rashidinia-Zarebnia [114]	解決	解決	第 5 章
		DE 変換	本論文	解決	解決	
(1.2)	Sinc-Nyström 法	SE 変換	Rashidinia-Zarebnia [113]	解決	解決	第 4 章
		DE 変換	Muhammad et al. [82]	解決	解決	
	Sinc 選点法	SE 変換	Rashidinia-Zarebnia [112]	解決	解決	第 6 章
		DE 変換	本論文	解決	解決	
(1.5)	Sinc 選点法	SE 変換	Riley [117, 118]	解決	解決	第 7 章
		DE 変換	Mori et al. [78]	解決	解決	
(1.6)	Sinc 選点法	SE 変換	岡山（修士論文）[89]	解決済	解決	第 8 章
		DE 変換	岡山（修士論文）[89]	解決済	解決	

1.5 本論文の構成

本論文の構成は次の通りである。まず第 2 章において、以降の章で必要となる Sinc 数値計算法の基礎事項について述べる。第 3 章では、Volterra 積分方程式 (1.1) に対する Sinc-Nyström 法について述べ、第 4 章では、Fredholm 積分方程式 (1.2) に対する Sinc-Nyström 法について述べる。この二章は Sinc-Nyström 法についての章であるが、第 5 章から第 8 章は Sinc 選点法に関する章である。第 5 章は Volterra 積分方程式 (1.1) に対する Sinc 選点法、第 6 章は Fredholm 積分方程式 (1.2) に対する Sinc 選点法、第 7 章は弱特異核を持つ Volterra 積分方程式 (1.5) に対する Sinc 選点法、第 8 章は弱特異核を持つ Fredholm 積分方程式 (1.6) に対する Sinc 選点法に関して記述する。第 9 章と第 10 章は精度保証を意識した章であり、第 9 章では定数を明示的に表した Sinc 数値計算法の基礎定理を、そして第 10 章ではそれを Fredholm 積分方程式 (1.2) に対する Sinc-Nyström 法（第 4 章に相当）に対して応用した結果を述べる。最後に第 11 章で本論文のまとめを述べる。付録 A は、第 7 章および第 8 章で現れた積分に対する、第 2 章で述べられた方法以外の近似法についての補遺である。

第 2 章

Sinc 数値計算法の基礎

本章では、次章以降で用いる Sinc 数値計算法に関する定義や基本的な定理（特に Sinc 関数近似・Sinc 積分・Sinc 不定積分について）をまとめる。まず第 2.1 節において、Sinc 数値計算法の要となる Sinc 関数近似の理論的歴史について簡単に述べる。次に第 2.2 節で、次章以降で必要となる近似公式を説明し、第 2.3 節で既存の誤差解析結果を述べる。ただし、既存の結果では次章以降の理論解析のために不十分なものもあるため、第 2.4 節で新規の誤差解析結果を述べる。

2.1 Sinc 関数近似理論の歴史

2.1.1 信号処理分野におけるサンプリング定理

Sinc 関数近似の起源は、電気・通信工学におけるサンプリング定理に見ることができる。連続信号 $F(x)$ を離散の標本点を用いて復元する問題に対し、この分野で著名な Shannon [125,126] は、次の結果を与えた。これは Shannon のサンプリング定理と呼ばれている。

定理 2.1 (Shannon [125]) 信号 $F(x)$ は、 W [1/s] 以上の周波数を含まないものとする。このとき、信号 $F(x)$ は、 $1/(2W)$ [s] 刻みの離散点を用いて次のように復元できる：

$$F(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(j/(2W)) \operatorname{sinc}(2Wx - j). \quad (2.1)$$

ただし関数 $\operatorname{sinc}(x)$ は次式で定義される関数である：

$$\operatorname{sinc}(x) = \begin{cases} \sin(\pi x)/(\pi x) & (\text{if } x \neq 0), \\ 1 & (\text{if } x = 0). \end{cases} \quad (2.2)$$

このサンプリングレート $1/(2W)$ は、Nyquist の結果 [87] にちなみ Nyquist レートと呼ばれている*¹。この定理はしばしば次のように言い換えられており、やはり Shannon のサンプ

*¹ Nyquist 周波数とは異なるので注意。

リング定理や, Whittaker–Shannon–Kotel’nikov (WSK) のサンプリング定理などと呼ばれる.

定理 2.2 (Whittaker [155], Shannon [125], Kotel’nikov [61], Nyquist [87], Raabe [111], 染谷 [52]) $F(x)$ は周波数帯域が $[-\pi/h, \pi/h]$ に制限された信号であるとする. すなわち関数 F は, 区間 $[-\pi/h, \pi/h]$ 上 2 乗可積分なある関数 $\hat{F}$ を用いて

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \hat{F}(\xi) e^{ix\xi} d\xi \quad (2.3)$$

と表されるとする. このとき,

$$F(x) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(jh) \operatorname{sinc}(x/h - j) \quad (2.4)$$

が成り立つ. 級数の収束は任意のコンパクト集合上で一様である.

式 (2.4) の右辺の関数は, Whittaker [155] の仕事にちなみ Whittaker’s cardinal function と呼ばれている.

2.1.2 Whittaker’s cardinal function による関数近似

関数 F に対し, 周波数帯域を制限する (高周波成分は 0) という仮定は, F が全複素平面で正則であることを意味する. ところが, 科学技術計算に現れる関数は, 通常は複素平面のどこかに特異点をもつため, この仮定はみたされず, 実際に多くの場合は誤差が出ることが知られている. この誤差は, 数値計算の分野では離散化誤差と呼ばれている*2. ただし, $h \rightarrow 0$ とすれば収束する, すなわち

$$F(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(jh) \operatorname{sinc}(x/h - j) \quad (2.5)$$

が成り立つことは期待でき, 実際に次の定理が示されている.

定理 2.3 (Butzer et al. [19, Theorem 3.8]) 関数 F は実軸上で連続, かつ 2 乗可積分とし, さらに

$$\hat{F}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(x) e^{-i\xi x} dx \quad (2.6)$$

で定義される関数 $\hat{F}$ は実軸上絶対可積分とする. このとき, 式 (2.5) は $x \in \mathbb{R}$ で一様に成り立つ. さらに次の評価が成り立つ:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| F(x) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(jh) \operatorname{sinc}(x/h - j) \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{-\pi/h} |\hat{F}(\xi)| d\xi + \int_{\pi/h}^{\infty} |\hat{F}(\xi)| d\xi \right\}. \quad (2.7)$$

*2 信号処理の分野ではエイリアシング誤差と呼ばれる.

式 (2.7) は、期待した通りに $h \rightarrow 0$ で収束することを示している。それだけでなく、もし $|\xi| \rightarrow \infty$ で $|\hat{F}(\xi)|$ が急速に 0 に近づく場合、すなわち関数 F の高周波成分が遠方で急減衰する場合には、式 (2.5) の収束が非常に速いことを示唆している。Shannon のサンプリング定理では F の高周波成分が 0 であることを仮定していたが、0 とはならなくても、高周波成分が十分に小さければ、Whittaker's cardinal function による近似：

$$F(x) \approx \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(jh) \operatorname{sinc}(x/h - j) \quad (2.8)$$

は良い近似になると期待される。さらに、科学技術計算に現れる関数は、ある範囲で正則であることが多く、これは高周波成分が急減少することを意味するため、その性質を仮定することは現実的と言える。Stenger [130, 134, 135] はこのような考察に基づき、近似式 (2.8) が有効に働く関数のクラスを考えた。具体的には、正の定数 d に対して

$$\mathcal{D}_d = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \zeta| < d\} \quad (2.9)$$

で定義される領域（図 2.1 参照）において、次の Hardy 空間と呼ばれる関数空間を導入した。

定義 2.4 p を $1 \leq p \leq \infty$ をみたす定数とする。また、 $0 < \epsilon < 1$ をみたす ϵ に対し、長方形の領域 $\mathcal{D}_d(\epsilon)$ を

$$\mathcal{D}_d(\epsilon) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} \zeta| < 1/\epsilon, |\operatorname{Im} \zeta| < d(1 - \epsilon)\} \quad (2.10)$$

で定める。このとき、領域 $\mathcal{D}_d$ で正則であって、かつ次で定めるノルム

$$\mathcal{N}_p(F, d) = \begin{cases} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ \oint_{\partial \mathcal{D}_d(\epsilon)} |F(\zeta)|^p |d\zeta| \right\}^{1/p} & (\text{if } 1 \leq p < \infty), \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{\zeta \in \mathcal{D}_d(\epsilon)} |F(\zeta)| & (\text{if } p = \infty) \end{cases} \quad (2.11)$$

が有界であるような関数 F 全体を $\mathbf{H}^p(\mathcal{D}_d)$ と定義する。

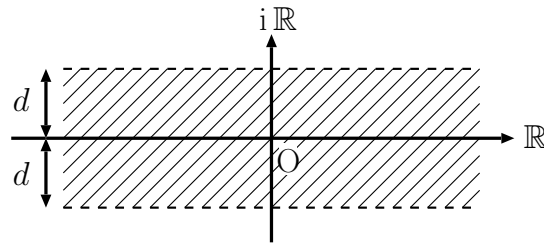


図 2.1 領域 $\mathcal{D}_d$ の概形.

Stenger の著作では、いわゆる「Sinc 関数」

$$S(j, h)(x) = \operatorname{sinc}(x/h - j) \quad (2.12)$$

をしばしば用い、近似式 (2.8) を「Sinc 関数近似」と呼んでいるので、本論文も以降この記法・呼び名を用いる。以上の定義の下で、Stenger は次のことを示した。

定理 2.5 (Stenger [135, Theorem 3.1.3]) $F \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ とすると、次の評価が成り立つ：

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| F(x) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(jh)S(j, h)(x) \right| \leq \frac{\mathcal{N}_1(F, d)}{\pi d(1 - e^{-2\pi d/h})} e^{-\pi d/h}. \quad (2.13)$$

この定理は、Sinc 関数近似 (2.8) の誤差は、刻み幅 h に対して $O(e^{-\pi d/h})$ と指数オーダーで減少することを示している。この収束は、 $O(h^2)$ のような多項式オーダーに比べ格段に速い。

2.1.3 遠方で指数関数的に減衰する関数に対する Sinc 関数近似

数値計算上は実際には無限和は計算できないため、近似関数における無限和 $\sum_{j=-\infty}^{\infty}$ を

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} F(jh)S(j, h)(x) \approx \sum_{j=-N}^N F(jh)S(j, h)(x) \quad (2.14)$$

のように有限項で打ち切る必要がある。この場合、打ち切ることによる誤差が生じるが、もし $x \rightarrow \infty$ で $|F(x)|$ が急減衰する場合、この打ち切りの誤差も非常に小さくなると期待される。実際、後述する Single-Exponential 変換 (SE 変換) と呼ばれる変数変換を用いると、

$$|F(x)| \leq c_0 \exp(-c_1|x|) \quad (2.15)$$

と遠方で指数関数的に減少させることができる (ただし c_0, c_1 は正の定数)。この場合の打ち切り誤差は次のように評価される。

補題 2.6 (Stenger [135, Theorem 3.1.7 の証明の中で示された内容]) 関数 F は任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して式 (2.15) が成り立つとする。このとき、次の評価が成り立つ：

$$\sum_{j=-\infty}^{-N-1} |F(jh)S(j, h)(x)| + \sum_{j=N+1}^{\infty} |F(jh)S(j, h)(x)| \leq \frac{2c_0}{c_1 h} e^{-c_1 N h}. \quad (2.16)$$

打ち切りを含めた最終的な近似式

$$F(x) \approx \sum_{j=-N}^N F(jh)S(j, h)(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.17)$$

の誤差は、定理 2.5 で評価した離散化誤差と補題 2.6 で評価した打ち切り誤差の和となるので、両者を同じオーダーで減少させると最も収束が速くなる。そのためには、刻み幅 h を N に対して適切に定める必要がある。典型的な処方箋としては、離散化誤差と打ち切り誤差における指数の肩の部分が等しくなるように、

$$e^{-\pi d/h} = e^{-c_1 N h} \iff h = \sqrt{\frac{\pi d}{c_1 N}} \quad (2.18)$$

と定めるのがよい。この考察に基づき、Stenger は次の定理を示した。

定理 2.7 (Stenger [135, Theorem 3.1.7]) 関数 F に対し、

1. $F \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$,
2. $|F(x)| \leq c_0 \exp(-c_1|x|) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

を仮定する. このとき, 刻み幅 h を式 (2.18) で定めると, N に依存しない定数 C が存在して

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| F(x) - \sum_{j=-N}^N F(jh)S(j, h)(x) \right| \leq C\sqrt{N} e^{-\sqrt{\pi d c_1} N} \quad (2.19)$$

が成り立つ.

2.1.4 遠方で二重指数関数的に減衰する関数に対する Sinc 関数近似

上では, 関数 F に対して式 (2.15) の形の減衰を仮定したが, もし関数の減衰がより速い場合は打ち切り誤差がさらに小さくなり, それに応じて全体の誤差も小さくできると予想される. 実際, 後述する Double-Exponential 変換 (DE 変換) と呼ばれる変数変換を用いると,

$$|F(x)| \leq c_0 \exp(-c_1 \exp(c_2|x|)) \quad (2.20)$$

と遠方で二重指数関数的に減少させることができる (ただし c_0, c_1, c_2 は正の定数). この場合の打ち切り誤差は次のように評価される.

補題 2.8 (Sugihara [140, Lemma 4.1 の証明の中で示された内容]) 関数 F は任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して式 (2.20) が成り立つとする. このとき, 次の評価が成り立つ:

$$\sum_{j=-\infty}^{-N-1} |F(jh)S(j, h)(x)| + \sum_{j=N+1}^{\infty} |F(jh)S(j, h)(x)| \leq \frac{2c_0}{c_1 c_2 h e^{c_2 N h}} e^{-c_1 \exp(c_2 N h)}. \quad (2.21)$$

Sugihara は, Stenger と同じく離散化誤差と打ち切り誤差を等しくすることを考え, 次の定理を示した.

定理 2.9 (Sugihara [140, Theorem 3.2]) 関数 F に対し,

1. $F \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$,
2. $|F(x)| \leq c_0 \exp(-c_1 \exp(c_2|x|)) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

を仮定する. このとき, 刻み幅 h を

$$h = \frac{\log(\pi d c_2 N / c_1)}{c_2 N} \quad (2.22)$$

で定めると, N に依存しない定数 C が存在して

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| F(x) - \sum_{j=-N}^N F(jh)S(j, h)(x) \right| \leq C e^{-\pi d c_2 N / \log(\pi d c_2 N / c_1)} \quad (2.23)$$

が成り立つ.

定理 2.7 の評価式に比べ, 定理 2.9 の評価式の方がずっと収束が速いことがわかる.

2.1.5 遠方で二重指数関数的よりも速く減衰する関数について

打ち切り誤差を小さくするという観点からは、より遠方での減衰が速い仮定、例えば

$$|F(x)| \leq c_0 \exp(-c_1 \exp(c_2 \exp(c_3 |x|))) \quad (2.24)$$

のような三重指数関数的に減衰する仮定を考えるのは自然である。また、それを実現する変数変換も存在する。ところが、このように減衰が急すぎる関数は、 $F \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ の仮定をみたさなくなることが次のように知られている。

定理 2.10 (Sugihara [140, Theorem 3.3]) 関数 F に対し、

1. $F \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$,
2. $|F(x)| \leq c_0 \exp(-c_1 \exp(c_2 |x|)) \quad (\forall x \in \mathbb{R})$

を仮定する。このとき、 $c_2 > \pi/(2d)$ をみたすような関数は、 $F \equiv 0$ のみである。

つまり、 $F \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ の仮定をみたしつつ、関数の減衰が最も速くなるのは、式 (2.20) の形の二重指数関数型の減衰が限界であることがわかる。

2.1.6 離散化誤差と打ち切り誤差以外の Sinc 関数近似の誤差の分類

上記では、Sinc 関数近似の離散化誤差（エイリアシング誤差）と打ち切り誤差の理論解析結果を説明したが、実用上は他の種類の誤差も存在することが知られており、それらの理論解析も行われている [19, 53, 159]。本論文では取り扱わないため詳細には立ち入らないが、ここでそれらの誤差について簡単に紹介しておく。

振幅誤差

真のサンプル値 $F(jh)$ は得られず、その近似値 $\tilde{F}(jh)$ が得られているとき、

$$\left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} [F(jh) - \tilde{F}(jh)] S(j, h)(x) \right| \quad (2.25)$$

を振幅誤差 (amplitude error) と呼ぶ。通常は任意の整数 j で $|F(jh) - \tilde{F}(jh)| < \epsilon$ が成り立つような ϵ は既知として解析される。例えば、丸め誤差はこの振幅誤差の特別な場合と考えられる。

サンプリングの時刻のずれによる誤差

関数値は正確に得られるとしても、サンプリングのタイミングがずれてしまうと、やはり誤差が生じる。サンプリングすべき時刻を $x_j = jh$ 、実際にサンプリングした時刻を $x_j + \delta_j$ と

すると,

$$\left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} [F(x_j) - F(x_j + \delta_j)] S(j, h)(x) \right| \quad (2.26)$$

がその誤差になり, 「time-jitter error」と呼ばれる.

情報の欠落による誤差

あるサンプル値 $F(jh)$ が抜けてしまっている場合や, またはサンプル値のある桁以降の小数部分が欠落している場合にも, やはり誤差が生じる. 例えば, 録音したデジタルデータに欠損がある場合はこの分類に入る. この誤差は, $0 \leq \alpha_j \leq 1$ をみたす α_j を用いて

$$\left| \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j F(jh) S(j, h)(x) \right| \quad (2.27)$$

と表現され, 「information loss error」と呼ばれる. $\alpha_j = 1$ の場合は, $F(jh)$ のサンプル値が存在しないことを意味し, $\alpha_j = 0$ は $F(jh)$ のサンプル値が完全に得られていることを意味する. $0 < \alpha_j < 1$ の場合は, $F(jh)$ のサンプル値がある程度得られているが, 完全ではないことを意味する.

多種類の複合誤差

離散化誤差, 打ち切り誤差, 振幅誤差と time-jitter error の四種は同時に扱われることも多く, その場合の誤差は

$$\left| F(x) - \sum_{j=-N}^N \tilde{F}(x_j + \delta_j) S(j, h)(x) \right| \quad (2.28)$$

で表される.

2.2 Sinc 関数近似より導出される近似公式

ここでは, 次章以降で用いる各種近似公式を述べる. 全て既存の近似公式であるが, 読者の便のために, 改めて Sinc 関数近似から出発して導出する.

2.2.1 無限区間における Sinc 関数近似・Sinc 積分・Sinc 不定積分

Sinc 数値計算法の基盤となるのは式 (2.17) で表される Sinc 関数近似である. ただし, この近似式はさらに改良の余地がある. 近似式 (2.17) は, 式 (2.14) のように, 無限和の上端と下端をある有限の N で打ち切ったものであった. そこでは上端と下端を同じ項数 N で打ち切っているが, $x \rightarrow -\infty$ と $x \rightarrow \infty$ で $|F(x)|$ の減衰の仕方が異なる場合, 異なる項数で打ち切る方がよい. 例えば $x \rightarrow -\infty$ の方が減衰が速い場合は, それに応じて $M < N$ となる M を定

めて

$$F(x) \approx \mathcal{C}_{M,N}[F](x) = \sum_{j=-M}^N F(jh)S(j,h)(x) \quad (2.29)$$

のように上端と下端で異なる打ち切り方をすると、打ち切り誤差はほとんど増加しないが、関数評価回数は $M + N + 1$ となり、元の $2N + 1$ よりも少なくなる。これは計算コストが削減できることを意味するため、この工夫は有用である。本論文でもしばしばこの形で用いる。ただし、 $M = N$ の場合は $\mathcal{C}_{N,N} = \mathcal{C}_N$ と表すことにする。また、詳しくは後の定理で述べるが、刻み幅 h は M または N に依存して適切に定める。

積分に対する近似公式は、Sinc 関数近似 $F \approx \mathcal{C}_{M,N}F$ の両辺に積分を作用させることで導くことができる。定積分の近似公式は、式 (2.29) の両辺を実軸上で積分することで、

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx \approx \mathcal{Q}_{M,N}F = \sum_{j=-M}^N F(jh) \int_{-\infty}^{\infty} S(j,h)(x) dx = h \sum_{j=-M}^N F(jh) \quad (2.30)$$

を得る。これは（打ち切った）複合台形則に他ならないが、Sinc 関数近似から導出できるという観点から、Sinc 積分とも呼ばれる。また同様にして、不定積分の近似公式も

$$\int_{-\infty}^x F(\sigma) d\sigma \approx \mathcal{J}_{M,N}[F](x) = \sum_{j=-M}^N F(jh) \int_{-\infty}^x S(j,h)(\sigma) d\sigma = \sum_{j=-M}^N F(jh)J(j,h)(x) \quad (2.31)$$

と導かれる。ただし関数 $J(j,h)(x)$ は、正弦関数

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(\sigma)}{\sigma} d\sigma \quad (2.32)$$

を用いて次のように定義される：

$$J(j,h)(x) = h \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \text{Si}[\pi(x/h - j)] \right\}. \quad (2.33)$$

本論文ではこれを Sinc 不定積分と呼ぶ。 $\mathcal{Q}_{M,N}$ と $\mathcal{J}_{M,N}$ も、 $M = N$ ならば $\mathcal{Q}_N$, $\mathcal{J}_N$ と表す。以下同様の記号は全てこの規則で簡略化する。

2.2.2 SE-Sinc 関数近似・SE-Sinc 積分・SE-Sinc 不定積分

以上は無限区間 ($x \in \mathbb{R}$) における近似であったが、方程式 (1.1)–(1.6) における変数 t の動作範囲は有限区間 $[a, b]$ に限られている。このような場合、変数変換が有用である。変数の動作領域を実軸全体に広げるという役割に加えて、§2.1.3 でも触れたように、変数変換後の関数が式 (2.15) をみたすようにする役割を果たす変数変換として、

$$t = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(x) = \frac{b-a}{2} \tanh\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{b+a}{2}, \quad (2.34)$$

$$x = \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t) = \log\left(\frac{t-a}{b-t}\right) \quad (2.35)$$

で定義される Single-Exponential 変換 (SE 変換) が最もよく用いられている^{*3}. SE 変換 $t = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(x)$ と Sinc 関数近似 (2.29) を組み合わせると, 区間 $[a, b]$ 上で定義された関数 f を $F(x) = f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x))$ とおくことで

$$f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x)) \approx \sum_{j=-M}^N f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))S(j, h)(x), \quad x \in \mathbb{R} \quad (2.36)$$

と近似することができる. これは

$$f(t) \approx C_{M,N}^{\text{SE}}[f](t) = \sum_{j=-M}^N f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)), \quad t \in [a, b] \quad (2.37)$$

と書き換えられる. 本論文ではこれを SE-Sinc 関数近似と呼ぶ. また, 区間 $[a, b]$ 上の定積分

$$\mathcal{Q}f = \int_a^b f(t) dt \quad (2.38)$$

に対しても, 変数変換 $t = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(x)$ と Sinc 積分 (2.30) を組み合わせることで,

$$\mathcal{Q}f = \int_{-\infty}^{\infty} f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x))\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(x) dx \approx \mathcal{Q}_{M,N}^{\text{SE}}f = h \sum_{j=-N}^N f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \quad (2.39)$$

のように近似できる. これを本論文では SE-Sinc 積分と呼ぶ. 同様に区間 $[a, b]$ 上の不定積分

$$\mathcal{J}[f](t) = \int_a^t f(s) ds, \quad t \in [a, b] \quad (2.40)$$

に対しても, 変数変換 $s = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\sigma)$ と Sinc 不定積分 (2.31) を組み合わせることで,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}[f](t) &= \int_{-\infty}^{\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)} f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\sigma))\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(\sigma) d\sigma \\ &\approx \mathcal{J}_{M,N}^{\text{SE}}[f](t) = \sum_{j=-N}^N f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh)J(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \end{aligned} \quad (2.41)$$

のように近似できる. これを本論文では SE-Sinc 不定積分と呼ぶ.

注意 2.11 基底関数に $J(j, h)$ を用いた不定積分の近似式 (2.41) は Haber [47] により導出されたものである. SE 変換と Sinc 関数近似に基づく近似式は他にも, 基底関数が $J(j, h)$ でなく $S(j, h)$ になっているものが提案されている. Haber [47] 自身が一つ提案している他, Stenger [134, 135] や Kearfott [57] によっても導出されている. これらの近似法は, 式 (2.37) と式 (2.41) を組み合わせた近似に他ならず, 近似式 (2.41) が本質的であると言える. そのため, 本論文では近似式 (2.41) に焦点を当てる.

^{*3} 元々は数値積分のために Moran [73, 128] や Schwartz [124] によって導入されたものである.

2.2.3 DE-Sinc 関数近似・DE-Sinc 積分・DE-Sinc 不定積分

近年では、上で用いていた SE 変換に代えて、Double-Exponential 変換 (DE 変換) と呼ばれる

$$t = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(x) = \frac{b-a}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x)\right) + \frac{b+a}{2}, \quad (2.42)$$

$$x = \{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t) = \log \left[\frac{1}{\pi} \log \left(\frac{t-a}{b-t} \right) + \sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{t-a}{b-t} \right) \right\}^2} \right] \quad (2.43)$$

という変換を用いる研究が進められている^{*4}。この変更の目的は、§2.1.4 でも触れたが、変数変換後の関数が式 (2.20) のように二重指数関数的に減衰するようにして、打ち切り誤差をさらに小さくすることである。DE 変換の場合は、関数近似・定積分近似・不定積分近似に対して

$$f(t) \approx \mathcal{C}_{M,N}^{\text{DE}}[f](t) = \sum_{j=-M}^N f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)), \quad (2.44)$$

$$\mathcal{Q}f \approx \mathcal{Q}_{M,N}^{\text{DE}}f = h \sum_{j=-M}^N f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh), \quad (2.45)$$

$$\mathcal{J}[f](t) \approx \mathcal{J}_{M,N}^{\text{DE}}[f](t) = \sum_{j=-M}^N f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) J(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \quad (2.46)$$

という近似公式が得られる。本論文ではこれらをそれぞれ DE-Sinc 関数近似・DE-Sinc 積分・DE-Sinc 不定積分と呼ぶ。

注意 2.12 不定積分の近似式 (2.46) は Muhammad–Mori [81] によって提案されたものだが、他にもやはり基底関数が $J(j, h)$ ではなく $S(j, h)$ になっている近似式が Tanaka et al. [147] によって提案されている。ただし、注意 2.11 で述べた内容と同様の理由により、本論文では近似式 (2.46) を主に取り扱う。

2.3 既存の誤差解析結果

2.3.1 関数空間

無限区間における近似公式 (2.29)–(2.31) が高精度であるためには、関数 F が定義 2.4 で述べた関数空間 $\mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ に属することが必要である。そのため、前節で述べた変数変換と組み合わせた近似公式の場合には、変数変換後の関数 F が $\mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ に属することが求められる。ただし、誤差解析における関数の条件としては、変数変換後の関数 F に対してではなく、元の関数 f に対する条件として課す方が自然である。そのため、SE 変換や DE 変換と組み合わせた

^{*4} DE 変換もやはり元々は数値積分のために Takahasi–Mori [142] によって導入されたものである。

近似公式の場合は、それぞれの変数変換で $\mathcal{D}_d$ を写した

$$\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg \left(\frac{z-a}{b-z} \right) \right| < d \right\}, \quad (2.47)$$

$$\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d) = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| \arg \left[\frac{1}{\pi} \log \left(\frac{z-a}{b-z} \right) + \sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{z-a}{b-z} \right) \right\}^2} \right] \right| < d \right\} \quad (2.48)$$

といった領域上で元の関数 f に条件が課せられることになる。例として、 $\psi_{0,1}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_1)$ と $\psi_{0,1}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_1)$ の概形をそれぞれ図 2.2 と図 2.3 に示す。 $\psi_{0,1}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_1)$ は目玉状の領域である。 $\psi_{0,1}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_1)$ の領域はさらに複雑で、端点の周りで無限に回転して重なっている Riemann 面になっている。

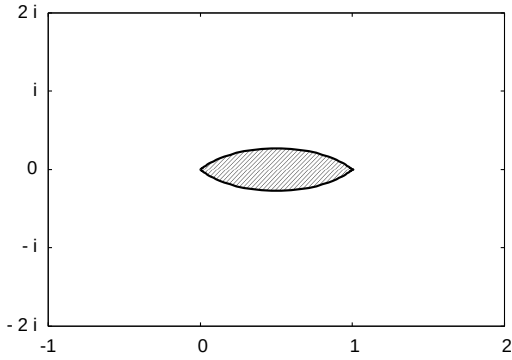


図 2.2 領域 $\psi_{0,1}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_1)$ の概形.

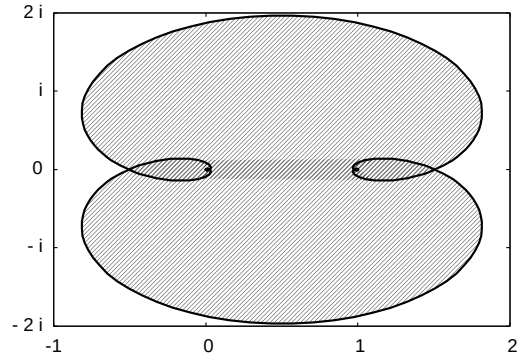


図 2.3 領域 $\psi_{0,1}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_1)$ の概形.

この領域 $\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ や $\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ を一般に $\mathfrak{D}$ として、次の二つの関数空間を導入する。

定義 2.13 複素平面上（もしくは、Riemann 面上）の有界^{*5} な単連結領域 $\mathfrak{D}$ 上で正則、 $\overline{\mathfrak{D}}$ 上で連続な関数全体を $\mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ と定義する。さらに、ノルム $\|\cdot\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})}$ を次式で定める：

$$\|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} = \max_{z \in \mathfrak{D}} |f(z)|. \quad (2.49)$$

定義 2.14 $\mathfrak{D}$ は $(a, b) \subset \mathfrak{D}$ をみたす複素平面上（もしくは、Riemann 面上）の有界^{*5} な単連結領域とする。また α, β, L は正の実数とする。このとき、 $f \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ であって、

$$|f(z)| \leq L|z-a|^\alpha |b-z|^\beta \quad (2.50)$$

が任意の $z \in \mathfrak{D}$ に対し成り立つような関数 f 全体を $\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\mathfrak{D})$ と定義する。定数 L を明示する必要がない場合は、略して $\mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{D})$ と表す。特に $\alpha = \beta$ である場合は、 $\mathbf{L}_\alpha(\mathfrak{D}) = \mathbf{L}_{\alpha,\alpha}(\mathfrak{D})$ と定義する。

式 (2.50) の右辺に関連して、本論文では

$$Q_{\alpha,\beta}(z) = (z-a)^\alpha (b-z)^\beta \quad (2.51)$$

^{*5} 有界性より、特に $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ の場合は $0 < d < \pi$ 、 $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ の場合は $0 < d < \pi/2$ の条件が定数 d に対して課される。

で定義される関数 $Q_{\alpha,\beta}$ をしばしば用いる．特に $\alpha = \beta = 1$ の場合がよく現れるが，そのときは単純に $Q_{1,1} = Q$ と表す．

$f \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ ならば，関数 $F(x) = f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x))$ は定理 2.7 の二つの仮定をみたし，また同様に $f \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ ならば，関数 $F(x) = f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(x))$ は定理 2.9 の二つの仮定をみたすので，関数空間 $\mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{D})$ は，Sinc 関数近似がそれぞれの変数変換と組み合わせて有効に働くための基本的な空間である．

$\mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ も重要な関数空間である．有界領域において正則，かつ有界な関数全体は $\sup$ ノルムで Banach 空間をなすという Hardy 空間論での標準的な結果 [60, 119] と，コンパクト集合上で連続な関数全体はやはり一様ノルムで Banach 空間をなすという古典的な結果より， $\mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ も Banach 空間となる．この事実は，次章以降の論点 1 での解析において重要となる．

定理 2.15 関数空間 $\mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ は，式 (2.49) で定めたノルム $\|\cdot\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})}$ に関して Banach 空間をなす．

ノルム $\|\cdot\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})}$ は複素平面上の一様ノルムであるが，誤差を評価する際には，実軸上の誤差のみに興味があるので，実軸区間 $[a, b]$ における一様ノルムで評価すべきである．本論文では論点 2 の解析においてこの点が重要となるので，周知のことではあるが，次の関数空間とノルムを定義しておく．

定義 2.16 区間 $[a, b]$ 上で連続であるような関数全体を $C([a, b])$ と定義する．本論文では $\mathbf{X} = C([a, b])$ と表す．さらに，ノルム $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ を次式で定義する：

$$\|f\|_{\mathbf{X}} = \max_{a \leq t \leq b} |f(t)|. \quad (2.52)$$

一様ノルムは $\|\cdot\|_{\infty}$ と表すことが多いが，ベクトルの無限大ノルムと区別する目的と，本論文では作用素ノルム $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(C([a, b]), C([a, b]))}$ の項が解析の際に多数出てくるため，記述を簡単にする目的で，上記の記法を導入する．

やはり周知のことではあるが，次の事実が成り立つ．この事実は，次章以降の論点 2 での解析において重要となる．

定理 2.17 関数空間 $\mathbf{X}$ はノルム $\|\cdot\|_{\mathbf{X}}$ に関して Banach 空間をなす．

2.3.2 SE-Sinc 関数近似・SE-Sinc 積分・SE-Sinc 不定積分の誤差解析

SE-Sinc 関数近似 (2.37) と SE-Sinc 積分 (2.39) の誤差解析は次のように与えられている．

定理 2.18 (Stenger [135, Theorem 4.2.5]) $f \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ とする．このとき， $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ とおき，自然数 n に対して刻み幅 h を

$$h = \sqrt{\frac{\pi d}{\mu n}} \quad (2.53)$$

と定め、自然数 M と N を

$$\begin{cases} M = n, & N = \lceil \alpha n / \beta \rceil & (\text{if } \mu = \alpha) \\ N = n, & N = \lceil \beta n / \alpha \rceil & (\text{if } \mu = \beta) \end{cases} \quad (2.54)$$

で定めると、 n によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\|f - \mathcal{C}_{M,N}^{\text{SE}} f\|_{\mathbf{X}} \leq C \sqrt{n} e^{-\sqrt{\pi d \mu n}}. \quad (2.55)$$

定理 2.19 (Stenger [135, Theorem 4.2.6]) $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ とする. このとき, $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ とおき, 自然数 n に対し刻み幅 h を

$$h = \sqrt{\frac{2\pi d}{\mu n}} \quad (2.56)$$

と定め, また自然数 M と N を式 (2.54) で定めると, n によらない定数 C が存在して, 次の評価が成り立つ：

$$|Qf - \mathcal{Q}_{M,N}^{\text{SE}} f| \leq C e^{-\sqrt{2\pi d \mu n}}. \quad (2.57)$$

また, SE-Sinc 不定積分 (2.41) の誤差解析は, $M = N$ の場合に限って次のように与えられている.

定理 2.20 (Haber [47, Theorem 2]) $fQ \in \mathbf{L}_{\mu}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ とする. このとき, 自然数 n に対し刻み幅 h を式 (2.53) で定めると, n によらない定数 C が存在して, 次の評価が成り立つ：

$$\|\mathcal{J}f - \mathcal{J}_{n,n}^{\text{SE}} f\|_{\mathbf{X}} \leq C \sqrt{n} e^{-\sqrt{\pi d \mu n}}.$$

2.3.3 DE-Sinc 関数近似・DE-Sinc 積分・DE-Sinc 不定積分の誤差解析

DE-Sinc 関数近似 (2.44) と DE-Sinc 積分 (2.45) の誤差解析は次のように与えられている.

定理 2.21 (岡山 [89, 定理 A.3]) $f \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とする. このとき, $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$, $\nu = \max\{\alpha, \beta\}$ とおき, $n > \nu/(2d)$ をみたす自然数 n に対して刻み幅 h を

$$h = \frac{\log(2dn/\mu)}{n} \quad (2.58)$$

と定め, 自然数 M と N を

$$\begin{cases} M = n, & N = n - \lfloor \log(\beta/\alpha)/h \rfloor & (\text{if } \mu = \alpha) \\ N = n, & M = n - \lfloor \log(\alpha/\beta)/h \rfloor & (\text{if } \mu = \beta) \end{cases} \quad (2.59)$$

で定めると, n によらない定数 C が存在して, 次の評価が成り立つ：

$$\|f - \mathcal{C}_{M,N}^{\text{DE}} f\|_{\mathbf{X}} \leq C e^{-\pi d n / \log(2dn/\mu)}. \quad (2.60)$$

注意 2.22 ここで (SE 変換の場合にはなかった) n に課されている条件 $n > \nu/(2d)$ は以下の理由による。まず、刻み幅 h が正の値となるために $n > \mu/(2d)$ が必要であり、さらに M と N も正の値となるために $n > \nu/(2d)$ が必要である。以下でも同様の理由で n に条件が課される。

定理 2.23 (岡山 [89, 定理 A.4]) $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とする。このとき、 $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$, $\nu = \max\{\alpha, \beta\}$ とおき、 $n > \nu/(4d)$ をみたす自然数 n に対し刻み幅 h を

$$h = \frac{\log(4dn/\mu)}{n} \quad (2.61)$$

と定め、また自然数 M と N を式 (2.59) で定めると、 n によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$|Qf - Q_{M,N}^{\text{DE}}f| \leq Ce^{-2\pi dn/\log(2dn/\mu)}. \quad (2.62)$$

注意 2.24 DE-Sinc 関数近似と DE-Sinc 積分の誤差解析は Tanaka et al. [148, 149] によっても行われているが、そこでは $M = N$ の場合のみ考えられている。既存の結果のうち、一般に $M \neq N$ で考えて誤差評価を与えているのは上記の定理のみである。

また、DE-Sinc 不定積分 (2.46) の収束性は、 $M = N$ の場合に限って Muhammad–Mori [81] によって議論された。その主張を数学的仮定を明らかにした定理の形にすると次のようになる。

定理 2.25 (Muhammad–Mori [81]) $fQ \in \mathbf{L}_{\mu}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とする。このとき、 $0 < \epsilon < \mu$ をみたす ϵ を用いて $\mu' = \mu - \epsilon$ とおき、 $n > \mu'/(2d)$ をみたす自然数 n に対し刻み幅 h を

$$h = \frac{\log(2dn/\mu')}{n} \quad (2.63)$$

と定めると、 n によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\|\mathcal{J}f - \mathcal{J}_{n,n}^{\text{DE}}f\|_{\mathbf{X}} \leq Ce^{-\pi dn/\log(2dn/\mu')}. \quad (2.64)$$

2.4 新規の誤差解析結果

既存の誤差解析のみでは、本論文の理論解析で用いるには不足な部分もあるので、ここで新規の誤差解析結果も述べておく。

2.4.1 刻み幅を変更した場合の SE-Sinc 関数近似・SE-Sinc 積分の誤差解析

定理 2.18 と定理 2.19 では、刻み幅の決定式が式 (2.53) と式 (2.56) で異なっている。これは、§2.1.3 で説明したように、離散化誤差と打ち切り誤差をほぼ等しい速度で減少させると

いう意味で、それぞれ最適な定め方になっている。ところが、後に説明する Sinc 選点法では、関数近似と積分近似で同一の選点を用いるため、いずれかの最適性を放棄し、刻み幅を等しくとる必要がある。この際、どちらの刻み幅を用いるのがよいのか議論になるため、参考のために刻み幅を変更した場合のそれぞれの誤差を以下に記しておく。各定理（およびその証明）より明らかであるので証明は省略する。

系 2.18.a (岡山らの結果 [91, 系 2.10]) の $M \neq N$ への拡張版 $f \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ とする。このとき、 $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ とおき、自然数 n に対して刻み幅 h を式 (2.56) で定め、自然数 M と N を式 (2.54) で定めると、 n によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\|f - \mathcal{C}_{M,N}^{\text{SE}} f\|_{\mathbf{X}} \leq C e^{-\sqrt{\pi d \mu n}/2}. \quad (2.65)$$

系 2.19.a (Okayama et al. [100, Corollary 2.9]) $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ とする。このとき、 $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ とおき、 $n > \mu/(2d)$ をみたす自然数 n に対して刻み幅 h を式 (2.53) で定め、自然数 M と N を式 (2.54) で定めると、 n によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$|Qf - \mathcal{Q}_{M,N}^{\text{SE}} f| \leq C e^{-\sqrt{\pi d \mu n}}. \quad (2.66)$$

2.4.2 刻み幅を変更した場合の DE-Sinc 関数近似・DE-Sinc 積分の誤差解析

同様にして、DE 変換を用いた場合の定理 2.21 と定理 2.23 に関連して、刻み幅の決定式を変更した場合の誤差解析を述べる。

系 2.21.a $f \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とする。このとき、 $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$, $\nu = \max\{\alpha, \beta\}$ とおき、 $n > \nu/(4d)$ をみたす自然数 n に対して刻み幅 h を式 (2.61) で定め、自然数 M と N を式 (2.59) で定めると、 n によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\|f - \mathcal{C}_{M,N}^{\text{DE}} f\|_{\mathbf{X}} \leq C e^{-\pi d n / \log(4 d n / \mu)}. \quad (2.67)$$

系 2.23.a (Okayama et al. [100, Corollary 2.10]) $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とする。このとき、 $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$, $\nu = \max\{\alpha, \beta\}$ とおき、 $n > \nu/(2d)$ をみたす自然数 n に対して刻み幅 h を式 (2.58) で定め、自然数 M と N を式 (2.59) で定めると、 n によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$|Qf - \mathcal{Q}_{M,N}^{\text{DE}} f| \leq C e^{-2\pi d n / \log(2 d n / \mu)}. \quad (2.68)$$

2.4.3 より詳細な SE-Sinc 不定積分・DE-Sinc 不定積分の誤差解析

定理 2.20 と定理 2.25 では、 $M = N$ の場合に限った評価であったが、一般に $M \neq N$ とし、さらに収束次数をより精密に評価した誤差解析結果を次に示す。なお、後の使用のため

に、定数の構造も明示しておく。

定理 2.26 (Okayama et al. [95, Theorem 2.7]) $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ とする。このとき、 $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ とおき、自然数 n に対し刻み幅 h を式 (2.53) で定め、また自然数 M と N を式 (2.54) で定めると、次の評価が成り立つ：

$$\|\mathcal{J}f - \mathcal{J}_{M,N}^{\text{SE}}f\|_{\mathbf{X}} \leq C e^{-\sqrt{\pi d \mu n}}. \quad (2.69)$$

ただし C は、 α, β, d のみに依存する定数 $C_{\alpha,\beta,d}^{\text{SE}}$ を用いて

$$C = LC_{\alpha,\beta,d}^{\text{SE}}(b-a)^{\alpha+\beta-1} \quad (2.70)$$

の形で表される定数である。

定理 2.27 (Okayama et al. [95, Theorem 2.13]) $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とする。このとき、 $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$, $\nu = \max\{\alpha, \beta\}$ とおき、 $n > \nu/(2d)$ をみたす自然数 n に対し刻み幅 h を式 (2.58) で定め、また自然数 M と N を式 (2.59) で定めると、次の評価が成り立つ：

$$\|\mathcal{J}f - \mathcal{J}_{M,N}^{\text{DE}}f\|_{\mathbf{X}} \leq C \frac{\log(2dn/\mu)}{n} e^{-\pi dn / \log(2dn/\mu)}. \quad (2.71)$$

ただし C は、 α, β, d のみに依存する定数 $C_{\alpha,\beta,d}^{\text{DE}}$ を用いて

$$C = LC_{\alpha,\beta,d}^{\text{DE}}(b-a)^{\alpha+\beta-1} \quad (2.72)$$

の形で表される定数である。

これらの定理の主張は第9章の定理 9.4 と定理 9.8 の特別な場合であるので、証明は第9章に譲る。

2.4.4 一般化 SE-Sinc 関数近似・一般化 DE-Sinc 関数近似とその誤差解析

SE-Sinc 関数近似 (2.37) と DE-Sinc 関数近似 (2.44) は、右辺が $t \rightarrow a$ や $t \rightarrow b$ で 0 となるため、被近似関数 f が $f(a) = f(b) = 0$ を満たさない場合は、そもそも高精度な近似は望めないという欠点がある。実際、 $\mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{D})$ の定義 2.14 における不等式 (2.50) は、 f が端点で 0 となることを要求する。

この問題に対処するには、関数 f から一次関数を差し引いて、端点で 0 となる関数 $\mathcal{T}f$ を

$$\mathcal{T}[f](t) = f(t) - \{f(a)\omega_a(t) + f(b)\omega_b(t)\}, \quad (2.73)$$

$$\omega_a(t) = \frac{b-t}{b-a}, \quad \omega_b(t) = \frac{t-a}{b-a} \quad (2.74)$$

のように構成し、この関数 $\mathcal{T}f$ に対して SE-Sinc 関数近似や DE-Sinc 関数近似を

$$\mathcal{T}f(t) \approx C_{M,N}^{\text{SE}}[\mathcal{T}f](t), \quad (2.75)$$

$$\mathcal{T}f(t) \approx C_{M,N}^{\text{DE}}[\mathcal{T}f](t) \quad (2.76)$$

のように適用することが考えられる．これらを，元の関数 f に対する近似として具体的にかければ，

$$f(t) \approx \mathcal{P}_{M,N}^{\text{SE}}[f](t) = f(a)\omega_a(t) + \sum_{j=-M}^N \mathcal{T}[f](\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))S(j,h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) + f(b)\omega_b(t), \quad (2.77)$$

$$f(t) \approx \mathcal{P}_{M,N}^{\text{DE}}[f](t) = f(a)\omega_a(t) + \sum_{j=-M}^N \mathcal{T}[f](\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))S(j,h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) + f(b)\omega_b(t) \quad (2.78)$$

と表せる．本論文では前者を一般化 SE-Sinc 関数近似，後者を一般化 DE-Sinc 関数近似と呼ぶ．

一般化 SE-Sinc 関数近似の有用性については Stenger [134, 135, 137] が早くより指摘しており，また一般化 DE-Sinc 関数近似についても，Mori et al. [78] が同様の考え方を導入している．ただし，定理の形で誤差解析を述べた文献は見当たらないので，ここでそれぞれの結果を述べておく．まず，これらの近似がうまく働く関数空間を以下に定義する．

定義 2.28 $\mathfrak{D}$ は定義 2.14 と同じ条件をみたす領域とし，また α, β は $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1$ をみたす実数とする．このとき， $f \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ であって，かつある定数 H が存在して，

$$|f(z) - f(a)| \leq H|z - a|^\alpha, \quad (2.79)$$

$$|f(b) - f(z)| \leq H|b - z|^\beta \quad (2.80)$$

が任意の $z \in \mathfrak{D}$ に対し成り立つような関数 f の全体を $\mathbf{M}_{\alpha,\beta}^H(\mathfrak{D})$ と定義する．定数 H を明示する必要がない場合は，略して $\mathbf{M}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{D})$ と表す．特に $\alpha = \beta$ である場合は， $\mathbf{M}_\alpha(\mathfrak{D}) = \mathbf{M}_{\alpha,\alpha}(\mathfrak{D})$ と定義する．

この定義の下で，次の命題が成り立つ（証明は明らかである）．

命題 2.29 (岡山らの結果 [98, 命題 2.4] の $\alpha \neq \beta$ への拡張版) 関数 f が $\mathbf{M}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{D})$ に属するとき，式 (2.73) で定められる $\mathcal{T}f$ は $\mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\mathfrak{D})$ に属する．

よって定理 2.18 と定理 2.21 を用いると，それぞれ次の定理が得られる．

定理 2.30 (岡山らの結果 [91, 定理 2.6] の $M \neq N$ への拡張版) $f \in \mathbf{M}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ とする．このとき， $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ とおき，自然数 n に対して刻み幅 h を式 (2.53) で定め，自然数 M と N を式 (2.54) で定めると， n によらない定数 C が存在して，次の評価が成り立つ：

$$\|f - \mathcal{P}_{M,N}^{\text{SE}}f\|_{\mathbf{X}} \leq C\sqrt{n}e^{-\sqrt{\pi d\mu n}}. \quad (2.81)$$

定理 2.31 (岡山らの結果 [91, 定理 2.13] の $M \neq N$ への拡張版) $f \in \mathbf{M}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とする．このとき， $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ ， $\nu = \max\{\alpha, \beta\}$ とおき， $n > \nu/(2d)$ をみたす自然数 n に対して刻み幅 h を式 (2.58) で定め，自然数 M と N を式 (2.59) で定めると， n によらない定数

C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\|f - \mathcal{P}_{M,N}^{\text{DE}} f\|_{\mathbf{X}} \leq C e^{-\pi d n / \log(2dn/\mu)}. \quad (2.82)$$

2.4.5 SE-Sinc 積分の条件下における DE-Sinc 積分の誤差評価

DE-Sinc 積分が前提としている被積分関数の仮定 ($fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$) は、SE-Sinc 積分が前提とする仮定 ($fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$) よりも厳しく、後者の条件がみたされても、前者の条件がみたされない場合がある。ただし、その場合に DE-Sinc 積分を強引に適用することは可能である。本論文では、第7章と第8章においてその場合の誤差評価が必要となる。ここでは、SE-Sinc 積分が前提とする仮定の下で、DE-Sinc 積分は $O(\exp(-c_1\sqrt{n}/\log n))$ の収束性をもつことを示す。

これまでも数値実験において、SE-Sinc 積分の $O(\exp(-c_1\sqrt{n}))$ と同等の収束性が観察されている [146]。このことが理論的に示されれば、SE-Sinc 積分と DE-Sinc 積分を使い分けることなく、常に DE-Sinc 積分を用いるという選択ができるため、実用においても有用な結果となる。同様の誤差解析は、DE-Sinc 関数近似や DE-Sinc 不定積分に対しても行えるが、ここでは本論文で必要となる DE-Sinc 積分に絞って解析を行う。

まず、領域 $\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ が変数変換 $\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot)$ によって移される領域は次のようになる。

命題 2.32 d は $0 < d \leq \pi$ をみたす定数とし、 $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ とおく。このとき、

$$\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\mathfrak{D}) = \left\{ \zeta \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \zeta| < \arcsin \left[\frac{d}{\pi \cosh(\operatorname{Re} \zeta)} \right] \right\} \quad (2.83)$$

と表される。

証明. 求めるべきは $\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\mathfrak{D})$ であるが、DE 変換は SE 変換を挟んだ形で $\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(z) = \operatorname{arcsinh}[\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(z)/\pi]$ と表せるので、 $\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\mathfrak{D}) = \operatorname{arcsinh}[\mathcal{D}_d/\pi]$ とかける。ここで、領域 $\mathcal{D}_d$ の境界線を $\xi = \sinh(x)\sqrt{\pi^2 - (d/\cosh x)^2} \pm id$ と表すと、領域 $\operatorname{arcsinh}[\mathcal{D}_d/\pi]$ の境界線は $\zeta = x \pm i \arcsin(d/(\pi \cosh x))$ と表されるので、主張が示された。■

この領域はやや理論的に取り扱いにくいので、新たに非負定数 δ を導入し、次式で定義される領域：

$$\mathcal{D}_d^\delta = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} \zeta| < d \exp(-\delta |\operatorname{Re} \zeta|)\} \quad (2.84)$$

を考えることにする。式 (2.83) で表される領域は、領域 $\mathcal{D}_{\arcsin(d/\pi)}^1$ を含むことが次のようにわかる。

補題 2.33 d は $0 < d \leq \pi$ をみたす定数とし、 $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ とおく。このとき、

$$\mathcal{D}_{\arcsin(d/\pi)}^1 \subseteq \{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\mathfrak{D}) \quad (2.85)$$

が成り立つ。

証明. 次の不等式

$$\sin[\arcsin(d/\pi)y] \leq \frac{d}{\pi} \frac{2y}{1+y^2} \quad (2.86)$$

が $0 \leq y \leq 1$ で成立するので, $y = e^{-|x|}$ とおけば

$$\arcsin(d/\pi) e^{-|x|} \leq \arcsin\left(\frac{d}{\pi} \frac{1}{\cosh x}\right) \quad (2.87)$$

が任意の $x \in \mathbb{R}$ で成り立つことがわかる. よって補題の主張が成り立つ. ■

したがって, 直ちに次のことが成り立つ.

補題 2.34 $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ ならば, $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\arcsin(d/\pi)}^1))$ である.

よって, $\arcsin(d/\pi)$ を新たに d と書き, 仮定 $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d^1))$ の下で, DE-Sinc 積分の誤差評価を行うことが本質的である. これに対し, 田中 [146] が次のような評価を与えている.

定理 2.35 (田中 [146, 定理 3.11]) $fQ \in \mathbf{L}_{\mu}^L(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d^\delta))$ とする. このとき, 刻み幅 h を

$$h = \frac{\log(4d(1+\delta)n/\mu)}{(1+\delta)n} \quad (2.88)$$

で定めると, n に依存しない定数 C が存在して, 次の評価が成り立つ:

$$|Qf - Q_n^{\text{DE}}f| \leq C \exp\left[-(\pi\mu/2)^{1/(1+\delta)} \frac{(2\pi d(1+\delta)n)^{1/(1+\delta)}}{\log(4d(1+\delta)n/\mu)}\right]. \quad (2.89)$$

ただし, DE-Sinc 積分の場合の刻み幅 h の決定式は,

$$h = \frac{\log(cn)}{n} \quad (2.90)$$

の形とするのが通例であり (第 2.3 節参照), この定理では h の決定式を変更しているため, 従来の数値実験結果の直接の説明にはなっていないことに注意. それに対し本論文では, 次の定理を示す.

定理 2.36 $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d^1))$ とし, $\nu = \max\{\alpha, \beta\}$ とおき, c をある正の数とする. このとき, n を $n > 1/c$ かつ $n > \nu/(2d)$ をみたす自然数とし, 刻み幅 h を式 (2.90) で定め, 自然数 M と N を式 (2.59) で定めると, α, β, c, d のみに依存する定数 $C_{\alpha,\beta,c,d}$ が存在して, 次の評価が成り立つ:

$$|Qf - Q_{M,N}^{\text{DE}}f| \leq L(b-a)^{\alpha+\beta-1} C_{\alpha,\beta,c,d} \exp\left[-\frac{2\pi d}{\sqrt{c}} \frac{\sqrt{n}}{\log(cn)}\right]. \quad (2.91)$$

この定理を示すアイディアは次のようである. 変数変換後の被積分関数を $F(x) =$

$f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(x))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} |\mathcal{Q}f - \mathcal{Q}_{M,N}^{\text{DE}}f| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx - h \sum_{j=-M}^N F(jh) \right| \\ &\leq \left| \int_{-(\lceil \frac{M}{2} \rceil + \frac{1}{2})h}^{(\lceil \frac{N}{2} \rceil + \frac{1}{2})h} F(x) dx - h \sum_{j=-\lceil \frac{M}{2} \rceil}^{\lceil \frac{N}{2} \rceil} F(jh) \right| + \int_{-\infty}^{-(\lceil \frac{M}{2} \rceil + \frac{1}{2})h} |F(x)| dx \\ &\quad + \int_{(\lceil \frac{N}{2} \rceil + \frac{1}{2})h}^{\infty} |F(x)| dx + h \sum_{j=-M}^{-\lceil \frac{M}{2} \rceil - 1} |F(jh)| + h \sum_{j=\lceil \frac{N}{2} \rceil + 1}^n |F(jh)| \quad (2.92) \end{aligned}$$

と評価できるので, 結局

$$E_1(F, n) = \left| \int_{-(\lceil \frac{M}{2} \rceil + \frac{1}{2})h}^{(\lceil \frac{N}{2} \rceil + \frac{1}{2})h} F(x) dx - h \sum_{j=-\lceil \frac{M}{2} \rceil}^{\lceil \frac{N}{2} \rceil} F(jh) \right|, \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} E_2(F, n) &= \int_{-\infty}^{-(\lceil \frac{M}{2} \rceil + \frac{1}{2})h} |F(x)| dx + \int_{(\lceil \frac{N}{2} \rceil + \frac{1}{2})h}^{\infty} |F(x)| dx \\ &\quad + h \sum_{j=-M}^{-\lceil \frac{M}{2} \rceil - 1} |F(jh)| + h \sum_{j=\lceil \frac{N}{2} \rceil + 1}^N |F(jh)| \quad (2.94) \end{aligned}$$

の評価をそれぞれ行えばよい. $E_1(F, n)$ と $E_2(F, n)$ の評価は, それぞれ次のようになる.

補題 2.37 定理 2.36 の仮定が成り立つとする. このとき, $F(x) = f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(x))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(x)$ とおくと, α, β, c, d のみに依存する定数 $\tilde{C}_{\alpha,\beta,c,d}$ が存在して,

$$E_1(F, n) \leq L(b-a)^{\alpha+\beta-1} \tilde{C}_{\alpha,\beta,c,d} \exp \left\{ -\frac{2\pi d}{\sqrt{c}} \frac{\sqrt{n}}{\log(cn)} \right\} \quad (2.95)$$

が成り立つ.

補題 2.38 定理 2.36 の仮定が成り立つとする. このとき, $F(x) = f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(x))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(x)$ とおくと,

$$E_2(F, n) \leq \frac{4L(b-a)^{\alpha+\beta-1} e^{\frac{\pi}{2}\nu}}{\mu} \exp \left\{ -\frac{\pi\mu}{2} \sqrt{cn} \right\} \quad (2.96)$$

が成り立つ. ただし $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ である.

この二つの補題より, 定理 2.36 の主張が成り立つことがわかる.

注意 2.39 式 (2.91) のみ見ると, 収束次数を上げるためには, c は小さくとる方がよいように思えるが, その場合 $C_{\alpha,\beta,c,d}$ が大きくなってしまいうことに注意. この定数を小さくするには, 式 (2.95) と式 (2.96) の $\exp(\cdot)$ の部分になるべく等しくなるように, $c = 4d/\mu$ と定めるとよい. 興味深いことに, これは通常の DE-Sinc 積分における定め方と全く同じである.

以下では, 補題 2.37 と補題 2.38 を示す. 補題 2.37 の証明は複雑なため, 比較的単純な補題 2.38 を先に示す.

証明. まず、明らかに

$$E_2(F, n) \leq 2 \int_{-\infty}^{-Mh/2} |F(x)| dx + 2 \int_{Nh/2}^{\infty} |F(x)| dx \quad (2.97)$$

が成り立つ. M, N, n の関係に注意すると, この第一項は

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\infty}^{-Mh/2} |F(x)| dx &\leq 2 \int_{-\infty}^{-Mh/2} \frac{L(b-a)^{\alpha+\beta-1} \pi \cosh(x)}{(1+e^{-\pi \sinh x})^\alpha (1+e^{\pi \sinh x})^\beta} dx \\ &\leq \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta-1}}{\alpha} \int_{-\infty}^{-Mh/2} \pi \alpha \cosh(x) e^{\pi \alpha \sinh x} dx \\ &= \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta-1}}{\alpha} e^{-\pi \alpha \sinh(Mh/2)} \\ &\leq \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta-1}}{\mu} e^{\frac{\pi}{2}\nu} e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh/2)} \end{aligned} \quad (2.98)$$

と評価できる. また第二項も全く同様に評価できるので, あと $h = \log(cn)/n$ を代入すれば, 示すべき不等式が得られる. ■

最後に, 補題 2.37 を示し, 本節を閉じる.

証明. 次のような積分路を定める:

$$\Gamma_{\text{vr}}^+(x, y) = \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta = x, 0 \leq \operatorname{Im} \zeta \leq y\}, \quad (2.99)$$

$$\Gamma_{\text{vr}}^-(x, y) = \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta = x, -y \leq \operatorname{Im} \zeta \leq 0\}, \quad (2.100)$$

$$\Gamma_{\text{vl}}^+(x, y) = \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta = -x, 0 \leq \operatorname{Im} \zeta \leq y\}, \quad (2.101)$$

$$\Gamma_{\text{vl}}^-(x, y) = \{\zeta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \zeta = -x, -y \leq \operatorname{Im} \zeta \leq 0\}, \quad (2.102)$$

$$\Gamma_{\text{hr}}^\pm(x, y) = \{\zeta \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} \zeta \leq x, \operatorname{Im} \zeta = \pm y\}, \quad (2.103)$$

$$\Gamma_{\text{hl}}^\pm(x, y) = \{\zeta \in \mathbb{C} : -x \leq \operatorname{Re} \zeta \leq 0, \operatorname{Im} \zeta = \pm y\}. \quad (2.104)$$

各積分路の向きは, 原点から見て反時計回りになるようにつける (図 2.4 参照).

以下では $x_{M,h} = (\lceil M/2 \rceil + 1/4)h$, $x_{N,h} = (\lceil N/2 \rceil + 1/4)h$, $x_{n,h} = (\lceil n/2 \rceil + 1/4)h$, $y_{n,h} = d(1-\epsilon) \exp(-x_{n,h})$ とおき, 積分路

$$\begin{aligned} &\Gamma_{\text{vr}}^+(x_{N,h}, y_{n,h}) + \Gamma_{\text{hr}}^+(x_{N,h}, y_{n,h}) + \Gamma_{\text{hl}}^+(x_{M,h}, y_{n,h}) + \Gamma_{\text{vl}}^+(x_{M,h}, y_{n,h}) \\ &+ \Gamma_{\text{vl}}^-(x_{M,h}, y_{n,h}) + \Gamma_{\text{hl}}^-(x_{M,h}, y_{n,h}) + \Gamma_{\text{hr}}^-(x_{N,h}, y_{n,h}) + \Gamma_{\text{vr}}^-(x_{N,h}, y_{n,h}) \end{aligned} \quad (2.105)$$

を考える. ただし $0 < \epsilon < 1$ である. 記号を簡単化するため, $k = \lceil M/2 \rceil$, $l = \lceil N/2 \rceil$ とおき, 以下では各積分路の $(x_{M,h}, y_{n,h})$ や $(x_{N,h}, y_{n,h})$ を省略する. 複素積分を用いることにより,

$$\int_{-(k+1/4)h}^{(l+1/4)h} F(x) dx = \frac{1}{2} \left\{ - \int_{\Gamma_{\text{vr}}^+ + \Gamma_{\text{hr}}^+ + \Gamma_{\text{hl}}^+ + \Gamma_{\text{vl}}^+} F(\zeta) d\zeta + \int_{\Gamma_{\text{vl}}^- + \Gamma_{\text{hr}}^- + \Gamma_{\text{hl}}^- + \Gamma_{\text{vr}}^-} F(\zeta) d\zeta \right\}, \quad (2.106)$$

$$h \sum_{j=-k}^k F(jh) = \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_{\text{vr}}^+ + \Gamma_{\text{hr}}^+ + \Gamma_{\text{hl}}^+ + \Gamma_{\text{vl}}^+ + \Gamma_{\text{vl}}^- + \Gamma_{\text{hr}}^- + \Gamma_{\text{hl}}^- + \Gamma_{\text{vr}}^-} \frac{F(\zeta)}{\tan(\pi \zeta / h)} d\zeta \quad (2.107)$$

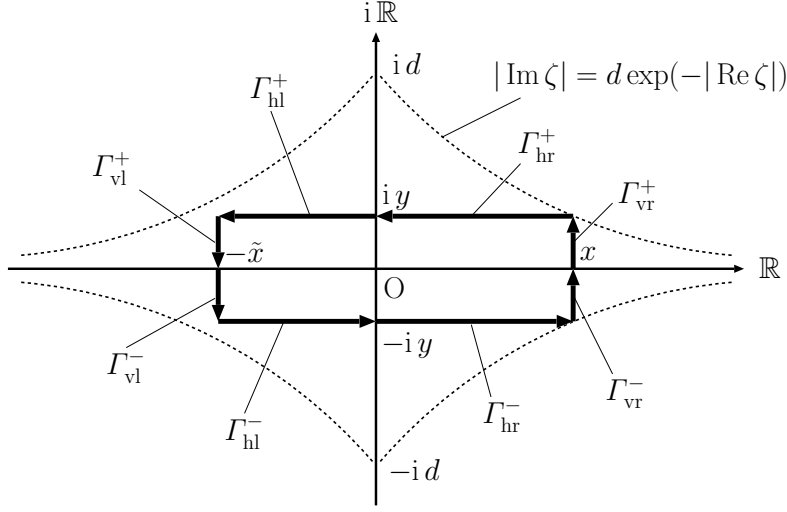


図 2.4 $x > \tilde{x}$ の場合の積分路 $\Gamma_{vr}^{\pm}(x, y)$, $\Gamma_{vl}^{\pm}(\tilde{x}, y)$ (垂直方向) と $\Gamma_{hr}^{\pm}(x, y)$, $\Gamma_{hl}^{\pm}(\tilde{x}, y)$ (水平方向).

と変形できる. ここで前者では Cauchy の積分定理, 後者では留数定理を用いた. よって,

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{-(k+1/4)h}^{(l+1/4)h} F(x) dx - h \sum_{j=-k}^l F(jh) \right| \\
 & \leq \left| \frac{1}{2} \left(- \int_{\Gamma_{hr}^+ + \Gamma_{hl}^+} F(\zeta) d\zeta + \int_{\Gamma_{hl}^- + \Gamma_{hr}^-} F(\zeta) d\zeta \right) - \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_{hr}^+ + \Gamma_{hl}^+ + \Gamma_{hl}^- + \Gamma_{hr}^-} \frac{F(\zeta)}{\tan(\pi\zeta/h)} d\zeta \right| \\
 & \quad + \left| \frac{1}{2} \left(- \int_{\Gamma_{vr}^+ + \Gamma_{vl}^+} F(\zeta) d\zeta + \int_{\Gamma_{vr}^- + \Gamma_{vl}^-} F(\zeta) d\zeta \right) - \frac{1}{2i} \int_{\Gamma_{vr}^+ + \Gamma_{vl}^+ + \Gamma_{vl}^- + \Gamma_{vr}^-} \frac{F(\zeta)}{\tan(\pi\zeta/h)} d\zeta \right|
 \end{aligned} \tag{2.108}$$

と評価できる. まずこの第二項を評価する. 後に示す補題 9.30 を用いて, M と N と n の関係に注意すれば, Γ_{vr}^+ 上での積分に関して,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Gamma_{vr}^+} |F(\zeta)| |d\zeta| & \leq \int_0^{y_{n,h}} \frac{L\pi(b-a)^{\alpha+\beta-1} \cosh(x_{N,h})}{(1 + e^{-\pi \sinh(x_{N,h}) \cos(y)})^{\alpha} (1 + e^{\pi \sinh(x_{N,h}) \cos(y)})^{\beta}} dy \\
 & \leq L\pi(b-a)^{\alpha+\beta-1} \int_0^{y_{n,h}} \cosh(x_{N,h}) e^{-\pi\beta \sinh(x_{N,h}) \cos(y_{n,h})} dy \\
 & = L\pi(b-a)^{\alpha+\beta-1} d(1-\epsilon) \frac{\cosh(x_{N,h})}{\exp(x_{n,h})} e^{-\pi\beta \sinh(x_{N,h}) \cos(y_{n,h})} \\
 & \leq L\pi(b-a)^{\alpha+\beta-1} d e^{-\pi\beta \sinh((l+1/4)h) \cos(y_{n,h})} \\
 & \leq L\pi(b-a)^{\alpha+\beta-1} d e^{\frac{\pi}{2}\nu} e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh/2) \cos(y_{n,h})},
 \end{aligned} \tag{2.109}$$

$$\int_{\Gamma_{vr}^+} \left| \frac{F(\zeta)}{\tan(\pi\zeta/h)} \right| |d\zeta| \leq L\pi(b-a)^{\alpha+\beta-1} d e^{\frac{\pi}{2}\nu} e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh/2) \cos(y_{n,h})} \tag{2.110}$$

が成り立つ. ただし $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$, $\nu = \max\{\alpha, \beta\}$ である. ここで後者の評価は, $x_{N,h} +$

$iy \in \Gamma_{\text{vr}}^+$ に対し

$$\begin{aligned}
 |1/\tan(\pi(x_{N,h} + iy)/h)| &= \sqrt{\frac{\cosh(2\pi y/h) + \cos(2\pi x_{N,h}/h)}{\cosh(2\pi y/h) - \cos(2\pi x_{N,h}/h)}} \\
 &= \sqrt{\frac{\cosh(2\pi y/h) + \cos(\pi(2l + 1/2))}{\cosh(2\pi y/h) - \cos(\pi(2l + 1/2))}} \\
 &= \sqrt{\frac{\cosh(2\pi y/h) + 0}{\cosh(2\pi y/h) - 0}} \\
 &= 1
 \end{aligned} \tag{2.111}$$

となることを用いて、前者の評価に帰着することで行っている。 Γ_{vr}^- および $\Gamma_{\text{vl}}^\pm$ 上での積分に対しても同様の評価ができる。さらに、

$$x_{n,h} = (\lceil n/2 \rceil + 1/4)h \geq (n/2 + 1/4)h \geq \frac{nh}{2} = \frac{\log(cn)}{2} \tag{2.112}$$

より、 $n > 1/c$ とあわせて

$$y_{n,h} = d(1 - \epsilon) \exp(-x_{n,h}) \leq \frac{d}{\sqrt{cn}} \leq d \tag{2.113}$$

が成り立つので、 $\cos(y_{n,h}) \geq \cos d$ と評価できることを用いると、

$$\begin{aligned}
 \lim_{\epsilon \rightarrow +0} (\text{式 (2.108) の第二項}) &\leq 4L\pi(b-a)^{\alpha+\beta-1} d e^{\frac{\pi}{2}\nu} e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh/2) \cos d} \\
 &= 4L\pi(b-a)^{\alpha+\beta-1} d e^{\frac{\pi}{2}\nu} e^{-\frac{\pi}{2}\mu \sqrt{cn} \cos d}
 \end{aligned} \tag{2.114}$$

が成り立つ。

次に式 (2.108) の第一項を評価する。まず

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Gamma_{\text{hr}}^+ + \Gamma_{\text{hl}}^+} F(\zeta) d\zeta + \int_{\Gamma_{\text{hr}}^- + \Gamma_{\text{hl}}^-} F(\zeta) d\zeta \\
 &= \int_{-x_{M,h}}^{x_{N,h}} \{F(x + iy_{n,h}) + F(x - iy_{n,h})\} dx,
 \end{aligned} \tag{2.115}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma_{\text{hr}}^+ + \Gamma_{\text{hl}}^+ + \Gamma_{\text{hl}}^- + \Gamma_{\text{hr}}^-} \frac{F(\zeta)}{\tan(\pi\zeta/h)} d\zeta \\
 &= \int_{-x_{M,h}}^{x_{N,h}} \left\{ -\frac{F(x + iy_{n,h})}{\tan(\pi(x + iy_{n,h})/h)} + \frac{F(x - iy_{n,h})}{\tan(\pi(x - iy_{n,h})/h)} \right\} dx
 \end{aligned} \tag{2.116}$$

と変形できるので、

(式 (2.108) の第一項)

$$\begin{aligned}
 &= \left| \int_{-x_{M,h}}^{x_{N,h}} \left\{ F(x - iy_{n,h}) \frac{e^{-i2\pi(x - iy_{n,h})/h}}{1 - e^{-i2\pi(x - iy_{n,h})/h}} - F(x + iy_{n,h}) \frac{e^{i2\pi(x + iy_{n,h})/h}}{1 - e^{i2\pi(x + iy_{n,h})/h}} \right\} dx \right| \\
 &\leq \frac{e^{-2\pi y_{n,h}/h}}{1 - e^{-2\pi y_{n,h}/h}} \int_{-x_{M,h}}^{x_{N,h}} \{|F(x - iy_{n,h})| + |F(x + iy_{n,h})|\} dx
 \end{aligned} \tag{2.117}$$

と評価できる. さらに積分の部分は

$$\begin{aligned}
& \int_{-x_{M,h}}^{x_{N,h}} \{|F(x - iy_{n,h})| + |F(x + iy_{n,h})|\} dx \\
& \leq 2L\pi(b-a)^{\alpha+\beta-1} \int_{-x_{M,h}}^{x_{N,h}} \frac{\cosh(x)}{(1 + e^{-\pi \sinh(x) \cos(y_{n,h})})^\alpha (1 + e^{\pi \sinh(x) \cos(y_{n,h})})^\beta} dx \\
& \leq 4L\pi(b-a)^{\alpha+\beta-1} \int_0^\infty \cosh(x) e^{-\pi \mu \sinh(x) \cos d} dx \\
& = \frac{4L(b-a)^{\alpha+\beta-1}}{\mu \cos d}
\end{aligned} \tag{2.118}$$

と評価できる. また

$$y_{n,h} = d(1 - \epsilon) \exp(-(\lceil n/2 \rceil + 1/4)h) \geq d(1 - \epsilon) \exp(-nh/2) \exp(-3h/4) \tag{2.119}$$

が成り立つので,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} (\text{式 (2.108) の第一項}) \leq \frac{4L(b-a)^{\alpha+\beta-1}}{\mu \cos d} \frac{e^{-2\pi d \exp(-nh/2) \exp(-3h/4)/h}}{1 - e^{-2\pi d \exp(-nh/2) \exp(-3h/4)/h}} \tag{2.120}$$

と評価できる. ここで,

$$\exp\left(-\frac{3h}{4}\right) = \exp\left(-\frac{3c \log(cn)}{4(cn)}\right) \geq \exp\left(-\frac{3c}{4e}\right) = \sqrt{\exp\left(-\frac{3c}{2e}\right)}, \tag{2.121}$$

$$\frac{\exp(-nh/2)}{h} = \frac{1}{c} \frac{\sqrt{cn}}{\log(cn)} \geq \frac{\sqrt{e}}{c} \tag{2.122}$$

が成り立つことを用いると, 式 (2.120) の右辺の分母は,

$$\frac{1}{\mu \cos(d)(1 - e^{-2\pi d \exp(-nh/2) \exp(-3h/4)/h})} \leq \frac{1}{\mu \cos(d)(1 - e^{-2\pi d/c'})} \tag{2.123}$$

と評価できる. ただし $c' = c/\sqrt{\exp(1 - 3c/(2e))}$ である. 次に式 (2.120) の右辺の分子の評価を考える. l'Hôpital の定理を用いると, 正の定数 c_1, c_2, c_3 に対し

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{c_1 n}}{\log(c_2 n)} \left(\frac{1}{(c_2 n)^{c_3/n}} - 1 \right) = 0 \tag{2.124}$$

となることに注意すると, c, d のみに依存する定数 $C_{c,d}$ が存在して,

$$\begin{aligned}
\exp\left\{-\frac{2\pi d \exp(-nh) \exp(-3h/4)}{h}\right\} &= \exp\left\{-\frac{2\pi d}{\sqrt{c}} \frac{\sqrt{n}}{\log(cn)} \frac{1}{\{(cn)^{3/4}\}^{1/n}}\right\} \\
&\leq C_{c,d} \exp\left\{-\frac{2\pi d}{\sqrt{c}} \frac{\sqrt{n}}{\log(cn)}\right\}
\end{aligned} \tag{2.125}$$

が成り立つ. 以上の分子と分母の評価をまとめると,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow +0} (\text{式 (2.108) の第一項}) \leq L(b-a)^{\alpha+\beta-1} \frac{4C_{c,d}}{\mu \cos(d)(1 - e^{-2\pi d/c'})} \exp\left\{-\frac{2\pi d}{\sqrt{c}} \frac{\sqrt{n}}{\log(cn)}\right\} \tag{2.126}$$

と評価できる. この評価と, 式 (2.114) の評価より, 示すべき不等式が得られる. ■

第 3 章

Volterra 積分方程式に対する Sinc-Nyström 法

本章では、Volterra 積分方程式 (1.1) に対して Muhammad et al. [82] によって提案された Sinc-Nyström 法における、二つの論点について議論する。まず第 3.1 節で彼らの結果についてまとめた後、第 3.2 節で改善すべき二つの点について述べ、第 3.3 節においてそれを解決する本論文の結果を述べる。第 3.4 節では、本論文の結果が確認できる数値実験結果を示す。第 3.5 節では一つ目の点の結果に対する証明を、第 3.6 節では二つ目の点の結果に対する証明を行う。

3.1 Muhammad et al. による Sinc-Nyström 法

3.1.1 DE-Sinc-Nyström 法とその誤差解析

まず、DE 変換を用いた Sinc-Nyström 法 (DE-Sinc-Nyström 法) について説明する。ここでは、 $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ かつ任意の $t \in [a, b]$ に対して $k(t, \cdot) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ が成り立つとする。このとき $k(t, \cdot)u(\cdot)Q(\cdot) \in \mathbf{L}_1(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ となるので、方程式 (1.1) における積分は、定理 2.27 に基づいて

$$\int_a^t k(t, s)u(s)ds \approx \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))u(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh)J(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \quad (3.1)$$

と近似できる。ただし刻み幅 h は式 (2.58) に基づいて式 (1.9) で定める。この近似により、次のような新たな方程式

$$\lambda u_N^{\text{DE}}(t) = g(t) + \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))u_N^{\text{DE}}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh)J(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \quad (3.2)$$

が得られる。方程式 (1.1) の代わりに、近似したこの方程式 (3.2) の解 u_N^{DE} を求めることを考える。それには、式 (3.2) の右辺の未知係数 $\mathbf{u}_m^{\text{DE}} = [u_N^{\text{DE}}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(-Nh)), \dots, u_N^{\text{DE}}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(Nh))]^\top$

を求めればよい (ただし $m = 2N + 1$). そこで, この方程式 (3.2) を

$$t = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(ih), \quad i = -N, \dots, N \quad (3.3)$$

の m 点でサンプリングして, 連立 1 次方程式をたてる. ここで $\delta_{ij}^{(-1)}$ を

$$\delta_{ij}^{(-1)} = \frac{1}{2} + \int_0^{i-j} \frac{\sin \pi s}{\pi s} ds \quad (3.4)$$

で定め, $m \times m$ の行列 V_m^{DE} を

$$(V_m^{\text{DE}})_{ij} = hk(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(ih), \psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh)\delta_{ij}^{(-1)}, \quad i, j = -N, \dots, N \quad (3.5)$$

とおき, さらに $\mathbf{g}_m^{\text{DE}} = [g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(-Nh)), \dots, g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(Nh))]^\top$ とおけば, 解くべき連立 1 次方程式は

$$(\lambda I_m - V_m^{\text{DE}})\mathbf{u}_m^{\text{DE}} = \mathbf{g}_m^{\text{DE}} \quad (3.6)$$

と表せる (I_m は $m \times m$ の単位行列). 連立 1 次方程式 (3.6) を解いて係数 $\mathbf{u}_m^{\text{DE}}$ を求めれば, 式 (3.2) によって近似解 u_N^{DE} が定まる. これが DE-Sinc-Nyström 法である.

このスキームに対し, Muhammad et al. [82] は次のような誤差解析を与えた.

定理 3.1 (Muhammad et al. [82, Theorem 3.2]) 方程式 (1.1) の u と k は $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ かつ任意の $t \in [a, b]$ に対し $k(t, \cdot) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ をみたすとする. このとき連立 1 次方程式 (3.6) を解いて式 (3.2) で u_N^{DE} を定めると, N によらない定数 C と C' が存在して,

$$\|u - u_N^{\text{DE}}\|_{\mathbf{X}} \leq (C\sqrt{N}\|(\lambda I_m - V_m^{\text{DE}})^{-1}\|_2 + C') \frac{\log N}{N} e^{-\pi dN / \log(2dN)} \quad (3.7)$$

が成り立つ.

3.1.2 SE-Sinc-Nyström 法

Muhammad et al. [82] はまず上述の DE-Sinc-Nyström 法を導出した後, DE 変換を SE 変換に取り替えたスキーム (SE-Sinc-Nyström 法) を考えて数値実験を行っている. 明示的にそのスキームは説明されていないが, スキーム導出の流れは DE-Sinc-Nyström 法と全く同様である. ここでは, $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ かつ任意の $t \in [a, b]$ に対して $k(t, \cdot) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ が成り立つとする. このとき $k(t, \cdot)u(\cdot)Q(\cdot) \in \mathbf{L}_1(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ となるので, 方程式 (1.1) における積分は, 定理 2.26 に基づいて

$$\int_a^t k(t, s)u(s)ds \approx \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))u(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh)J(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \quad (3.8)$$

と近似できる. ただし刻み幅 h は式 (2.53) に基づいて式 (1.8) で定める. この近似により, 次のような新たな方程式

$$\lambda u_N^{\text{SE}}(t) = g(t) + \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))u_N^{\text{SE}}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh)J(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \quad (3.9)$$

が得られる。方程式 (1.1) の代わりに、近似したこの方程式 (3.9) の解 u_N^{SE} を求めることを考える。それには、式 (3.9) の右辺の未知係数 $\mathbf{u}_m^{\text{SE}} = [u_N^{\text{SE}}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(-Nh)), \dots, u_N^{\text{SE}}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(Nh))]^\top$ を求めればよい。そこで、この方程式 (3.9) を

$$t = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih), \quad i = -N, \dots, N \quad (3.10)$$

の m 点でサンプリングして、連立 1 次方程式をたてる。ここで $m \times m$ の行列 V_m^{SE} を

$$(V_m^{\text{SE}})_{ij} = hk(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih), \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh)\delta_{ij}^{(-1)}, \quad i, j = -N, \dots, N \quad (3.11)$$

とおき、さらに $\mathbf{g}_m^{\text{SE}} = [g(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(-Nh)), \dots, g(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(Nh))]^\top$ とおけば、解くべき連立 1 次方程式は

$$(\lambda I_m - V_m^{\text{SE}})\mathbf{u}_m^{\text{SE}} = \mathbf{g}_m^{\text{SE}} \quad (3.12)$$

と表される。この方程式 (3.12) を解いて得られた係数 $\mathbf{u}_m^{\text{SE}}$ を用いて、式 (3.9) より近似解 u_N^{SE} が求まる。これが SE-Sinc-Nyström 法である。このスキームに対する誤差解析は行われていない。

3.2 Muhammad et al. の結果に関する議論

上述した Muhammad et al. による結果には、以下の議論すべき点がある。

論点 1 (スキームが未知関数 u に依存) DE-Sinc-Nyström 法においては、 $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ と仮定し、そのパラメータ d (これは正則領域の広さを表す) を用いて、刻み幅 h を式 (1.9) で定めている。また SE-Sinc-Nyström 法においても、 $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ と仮定し、やはりそのパラメータ d を用いて、刻み幅 h を式 (1.8) で定めなければならない。ところが解 u は、これから求めるべき未知関数であり、直接 u を調べて正則領域を知ることはできない。そのため、 d の値が定まらない場合、スキームを適用することができないという問題がある。

論点 2 (スキームの可解性・収束性が未保証) Muhammad et al. が与えた定理 3.1 では、暗黙のうちに連立 1 次方程式が可解である (係数行列 $\lambda I_m - V_m^{\text{DE}}$ に逆行列が存在する) ことを仮定しているが、これはスキームの可解性として別途示すべきことである。また、誤差評価式 (3.7) には、この行列の逆行列の 2 ノルム $\|(\lambda I_m - V_m^{\text{DE}})^{-1}\|_2$ が含まれているが、これは N に依存する項である ($m = 2N + 1$ に注意)。この項が N に対し未評価であるため、スキームの収束性も示されているとは言い難い。

3.3 主結果：Sinc-Nyström 法に対する理論解析

3.3.1 解 u の性質の解析 (論点 1)

本研究では、論点 1 に関して次のような結果を得た。証明は第 3.5 節で与える。

定理 3.2 (岡山ら [94, 定理 4.1]) 関数 g は $g \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ をみたし, また関数 k は任意の $z, w \in \overline{\mathfrak{D}}$ に対し $k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ かつ $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ をみたすとする. このとき, 方程式 (1.1) には唯一解 $u \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ が存在する.

SE 変換を用いる場合は, $g, k(z, \cdot), k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ ならば $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ となることがこの定理で保証されるので, この d を式 (1.8) で用いればよい. 同じく DE 変換を用いる場合も, 関数 g と k の正則領域 $\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ を調べれば, この d を式 (1.9) で用いることができる. このように, 定理 3.2 を用いることで, 関数 u が不明な場合でも刻み幅 h の決定式で用いるパラメータ d を定められる.

注意 3.3 定理 3.2 を用いて得られた d は必ずしも最適とは言えず, それよりも広い範囲で方程式 (1.1) の被積分関数 $f = k(t, \cdot)u(\cdot)$ が正則である場合もある. ただしそれは非常に特殊な場合であり,

1. 関数 g のもつ特異性と関数 $k(\cdot, s)$ のもつ特異性が打ち消しあう, または
2. 関数 u のもつ特異性と関数 $k(t, \cdot)$ のもつ特異性が打ち消しあう

ということがたまたま起こる場合である. 例えば, 次の方程式

$$u(t) - \int_0^t \sqrt{1 + (2t-1)^2} u(s) ds = t^2 - \frac{t^3}{3} \sqrt{1 + (2t-1)^2}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.13)$$

は前者の例である. この関数 g と $k(\cdot, s)$ は, $z = (1+i)/2$ で同一の特異点をもっており, それらが打ち消しあって, 方程式の解 $u(t) = t^2$ は特異性をもたない関数となっている. 被積分関数 $f(s) = k(t, s)u(s)$ を調べると, やはり s に関して特異性をもたない関数となっており, g や k よりも広い範囲で正則である. また, 次の方程式

$$u(t) - \int_0^t \sqrt{1 + (2s-1)^2} u(s) ds = \sqrt{1 + (2t-1)^2} - \frac{2}{3} t(2t^2 - 3t + 3), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.14)$$

は后者の例である. 方程式の解は $u(t) = \sqrt{1 + (2t-1)^2}$ であり, $z = (1+i)/2$ で特異性をもつが, 関数 $k(t, \cdot)$ も同一点で特異性を持ち, 両者の特異性が打ち消しあうことで被積分関数 $f(s) = k(t, s)u(s) = 1 + (2s-1)^2$ は特異性をもたない関数となる.

このような例が存在するが, あくまでも特殊ケースである. 多くの場合には上界の d を与え, また実際の正則領域よりも大きく見積もることはないため, 定理 3.2 を用いて d を推定する方法は有用である.

3.3.2 スキームの可解性・収束性の解析 (論点 2)

さらに本研究では, 論点 2 に関して次のような結果を得た. 証明は第 3.6 節で与える.

定理 3.4 (岡山ら [94, 定理 5.2]) 定理 3.2 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ として成り立つとする. このとき, ある自然数 N_0 が存在して, 任意の $N \geq N_0$ をみたす N に対し連立 1 次方程式 (3.12)

は一意可解で、 N によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\|u - u_N^{\text{SE}}\|_{\mathbf{x}} \leq C e^{-\sqrt{\pi d N}}. \quad (3.15)$$

定理 3.5 (岡山ら [94, 定理 5.3]) 定理 3.2 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ として成り立つとする。このとき、ある自然数 N_0 が存在して、任意の $N \geq N_0$ をみたす N に対し連立 1 次方程式 (3.6) は一意可解で、 N によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\|u - u_N^{\text{DE}}\|_{\mathbf{x}} \leq C \frac{\log(2dN)}{N} e^{-\pi d N / \log(2dN)}. \quad (3.16)$$

これらの定理では、連立 1 次方程式の可解性が示されている。さらに誤差評価式は、全て既知の N の関数であるので、 $N \rightarrow \infty$ で収束することだけでなく、その収束次数も示されている。

3.4 数値実験

ここでは先の定理を裏付ける数値実験結果を示す。実験の目的は、Sinc-Nyström 法において設定するパラメータ d を変更した場合に、収束性がどのように変化するかを確かめること (定理 3.2 に関連)、そして収束速度の確認である (定理 3.4 と定理 3.5 に関連)。実装言語は C++ で、浮動小数点数には double 型を用いた。連立 1 次方程式を解くにあたっては LU 分解を用いた。また、区間は全て $[a, b] = [0, 1]$ である。

3.4.1 定理 3.2 によって最適の d の値が求まる場合

ここでは次の方程式を考える。

例 3.6 次の第二種 Volterra 積分方程式

$$u(t) = \frac{\sqrt{t}}{2} \left\{ \frac{6}{1+3t^2} + \log(1+3t^2) \right\} - \int_0^t \sqrt{ts} u(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.17)$$

の解は $u(t) = 3\sqrt{t}/(1+3t^2)$ である。

まず解析解が不明だとして、本論文の結果である定理 3.2 を用いて、パラメータ d を求めてみる。 π より少し小さい数として $\pi_m = 3.14$ とおくと、この方程式における関数 g と k は、SE 変換の場合は $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{2\pi_m/3})$ で定理 3.2 の条件をみたす。また DE 変換の場合は、

$$r = \frac{\pi}{3 \log 2}, \quad (3.18)$$

$$x = -\frac{\log 2}{\pi} \left[1 - \sqrt{\frac{1+5r^2 + \sqrt{(1+5r^2)^2 + (4r)^2}}{2}} \right], \quad (3.19)$$

$$y = \frac{2}{3} \left[1 - \sqrt{\frac{2}{1+5r^2 + \sqrt{(1+5r^2)^2 + (4r)^2}}} \right] \quad (3.20)$$

と定めて、 $d_m = \arcsin(y/\sqrt{x^2 + y^2}) - \epsilon$ (ϵ は小さな正の値) とおくと、 $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{d_m})$ で定理 3.2 の条件をみたす。よって定理 3.2 より、解 u のパラメータ d は、SE 変換の場合は $d = 2\pi_m/3 \simeq 2.09$ 、DE 変換の場合は $d = d_m \simeq 0.69$ であることがわかる。方程式 (3.17) の解析解でこの結果を確かめると、実際に $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{2\pi_m/3}))$ かつ $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{d_m}))$ をみたすので、定理 3.2 の主張が正しいことが確認できる。このように、本論文の結果を用いると、解析解が不明の場合でもパラメータ d を求めることが可能であり、刻み幅 h を式 (1.8) や (1.9) で定めて計算を実行できる。

ところで、実は正しい d の値が不明の場合でも、何らかの値でこの d を設定すれば計算は（一応は）実行可能なはずである。そこで方程式 (3.17) に対して、 d を正しく定めた場合と、そうでない場合で数値実験を行って比較する。第 2 章の脚注*5 で述べたように、 d の値の上限は、SE 変換の場合は $d = \pi$ 、DE 変換の場合は $d = \pi/2$ であるので、正しい d が不明の場合に、これらの値で代用するのは一つの方法である（これは被近似関数に対し、全複素平面で正則だと期待することに対応する）。計算結果を図 3.1 に示す。ただし、図中の最大誤差（maximum error）は、区間 $[0, 1]$ を等分割した 101 点上での絶対誤差のうち、最も大きな値である。誤差の減少の様子を観察すると、いずれの方法でも $O(\exp(-c_1\sqrt{N}))$ または $O(\exp(-c_2 N/\log N))$ のオーダーが確認される。ただし、正しく d の値を設定した場合（実線；SE-Sinc with $d = 2.09$ 、DE-Sinc with $d = 0.69$ ）に比べ、 d を上限値で代用した場合（鎖線；SE-Sinc with $d = 3.14$ 、DE-Sinc with $d = 1.57$ ）は収束が遅いことがわかる。

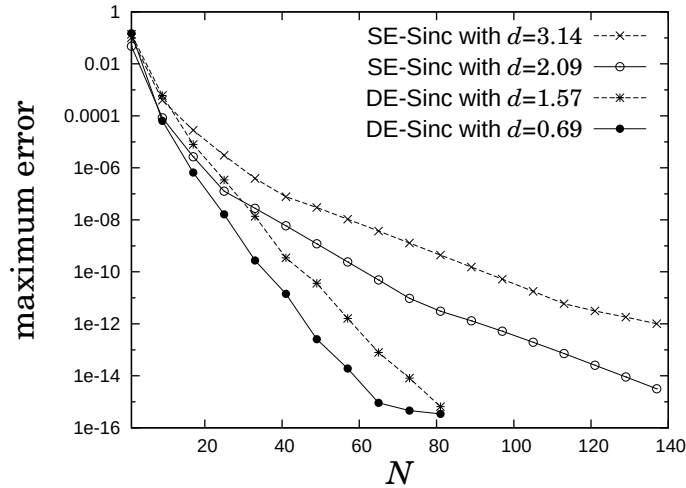


図 3.1 方程式 (3.17) に対する SE-Sinc-Nyström 法と DE-Sinc-Nyström 法の d の値を変えた計算結果： d を定理に従って定めた場合（実線）、 d を上限値で代用した場合（鎖線）。

また、上記の二種類以外で d を定めた場合の挙動にも興味があるので、SE-Sinc-Nyström 法の場合に、

$$h = \sqrt{\frac{2^r \pi_m \pi}{3N}} \quad (3.21)$$

とし、 $r = -1, 0, 1, 2, 3$ と動かした場合の数値実験結果を図 3.2 と図 3.3 に示す。 $r = 1$ の場

合が理論的には最適であり、実際に数値実験でも最も収束が速いことが確認できる。

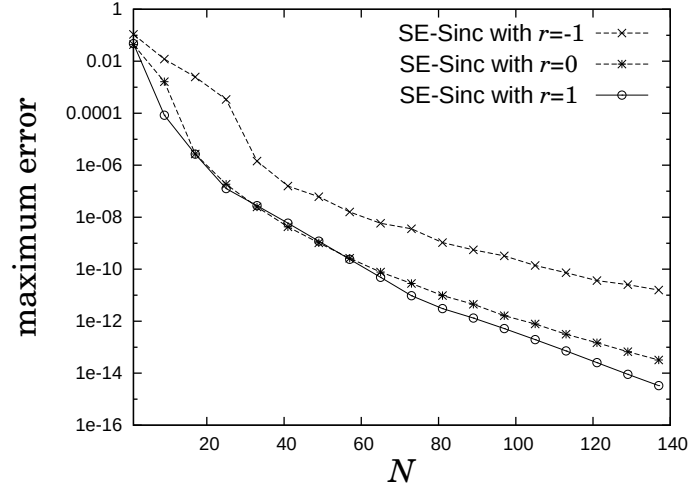


図 3.2 方程式 (3.17) に対する SE-Sinc-Nyström 法の h を式 (3.21) で定めて $r = -1, 0, 1$ と変化させた計算結果. 理論的には $r = 1$ (実線) が最適.

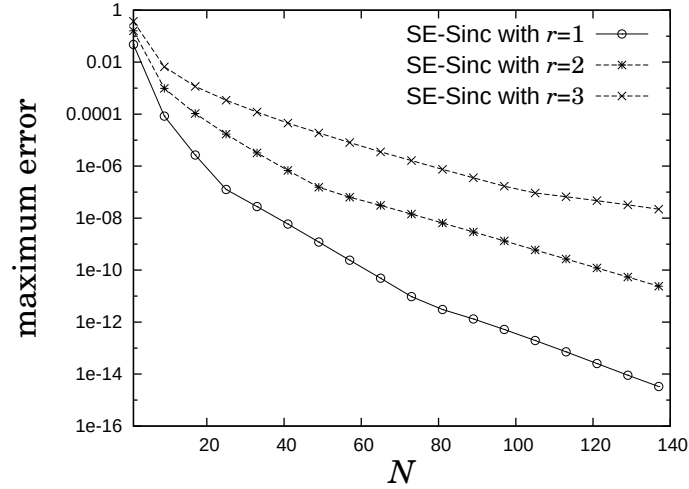


図 3.3 方程式 (3.17) に対する SE-Sinc-Nyström 法の h を式 (3.21) で定めて $r = 1, 2, 3$ と変化させた計算結果. 理論的には $r = 1$ (実線) が最適.

DE-Sinc-Nyström 法の場合は

$$h = \frac{\log(2^r d_m N)}{N} \quad (3.22)$$

とし, $r = -1, 0, 1, 2, 3$ と動かした場合の数値実験結果を図 3.4 と図 3.5 に示す. やはり $r = 1$ が最適のはずであるが, 図から判断すると, r が小さい方が収束が速い. この現象に関する考察は §3.4.3 で述べる.

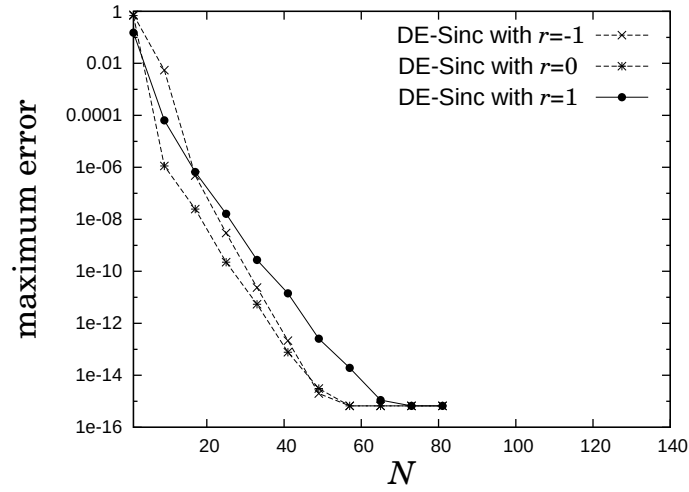


図 3.4 方程式 (3.17) に対する DE-Sinc-Nyström 法の h を式 (3.22) で定めて $r = -1, 0, 1$ と変化させた計算結果. 理論的には $r = 1$ (実線) が最適.

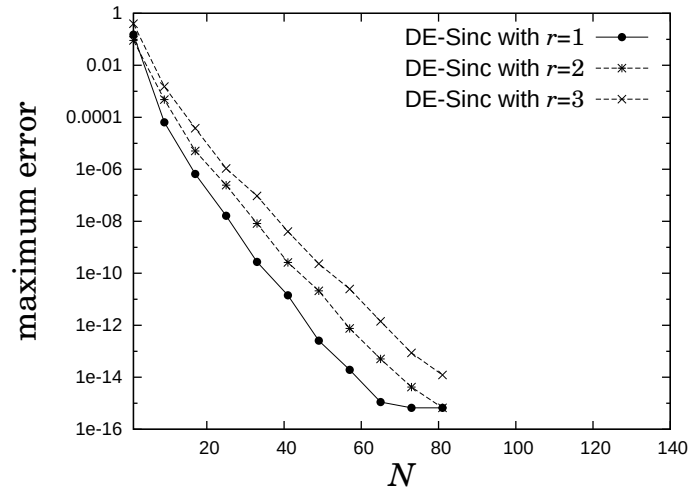


図 3.5 方程式 (3.17) に対する DE-Sinc-Nyström 法の h を式 (3.22) で定めて $r = 1, 2, 3$ と変化させた計算結果. 理論的には $r = 1$ (実線) が最適.

3.4.2 最適の d の値が定理 3.2 では求まらない場合

注意 3.3 で述べたように, パラメータ d の最適な値は, 定理 3.2 に基づいて求めた d よりも大きくなる場合が存在する. ここではその例として方程式 (3.13) を考える.

例 3.7 第二種 Volterra 積分方程式 (3.13) を考える. 解は $u(t) = t^2$ である.

まず解析解が不明だとして, 本論文の結果である定理 3.2 を用いて, パラメータ d を求めてみる. この方程式における関数 g と k は, SE 変換の場合は $\mathcal{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi/2})$ で定理 3.2 の

条件をみtas. また DE 変換の場合は, $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi/6})$ で定理 3.2 の条件をみtas. よって定理 3.2 より, 解 u のパラメータ d は, SE 変換の場合は $d = \pi/2$, DE 変換の場合は $d = \pi/6$ となる. 方程式 (3.13) の解析解でこの結果を確かめると, $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi_m}))$ かつ $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi_m/2}))$ であり, 実際の最適な d の値は定理で得られた値よりも大きい. ただし, 明らかに $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi_m}))$ ならば $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi/2}))$ であり, 同じく $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi_m/2}))$ ならば $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi/6}))$ であるので, この場合においても定理 3.2 の主張は正しいことが確認できる. ここで重要なのは, 解析解が不明の場合でもパラメータ d を求めることが可能であり, 刻み幅 h を式 (1.8) や (1.9) で定めて計算を実行できるということである.

今回は, d を定理 3.2 に従って定めた場合と, 最適値に定めた場合で計算を行った. 結果を図 3.6 に示す. d を最適値で定めた方が収束が速いと予想され, 実際に SE-Sinc-Nyström 法の場合をみると, 最適値で定めた方が収束が速いことが観察できる^{*1}. ただし, DE-Sinc-Nyström 法の場合では, 最適ではないにも拘らず, 定理 3.2 に従って定めた場合の方が収束が速い. この現象に関する考察は § 3.4.3 で述べる.

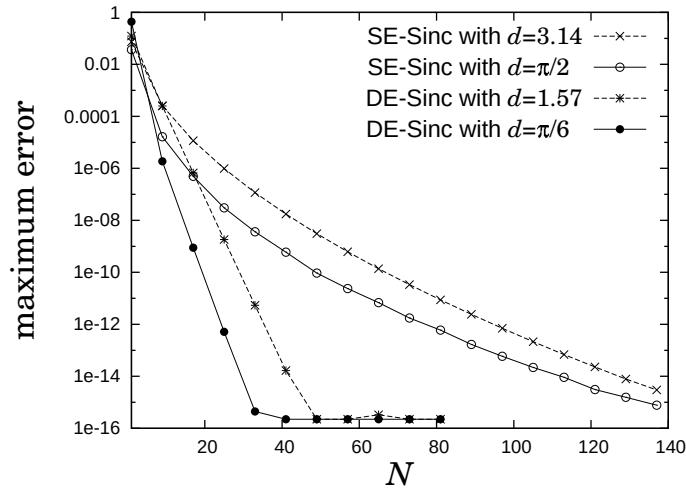


図 3.6 方程式 (3.13) に対する SE-Sinc-Nyström 法と DE-Sinc-Nyström 法の d の値を変えた計算結果: d を定理に従って定めた場合 (実線), d を最適値で定めた場合 (鎖線).

今回においても, その他の値で d を設定した場合の挙動を調べる. SE-Sinc-Nyström 法の場合に,

$$h = \sqrt{\frac{2^r \pi_m \pi}{N}} \quad (3.23)$$

とし, $r = -2, -1, 0, 1, 2$ と動かした場合の数値実験結果を図 3.7 と図 3.8 に示す. $r = 0$ の場合が理論的には最適であり, 実際に数値実験でも最も収束が速いことが確認できる.

^{*1} この図 3.6 の範囲では定理 3.2 に従って定めた方が誤差が小さいように見えるが, 収束速度 (グラフの傾き) は最適値で定めた方が速い.

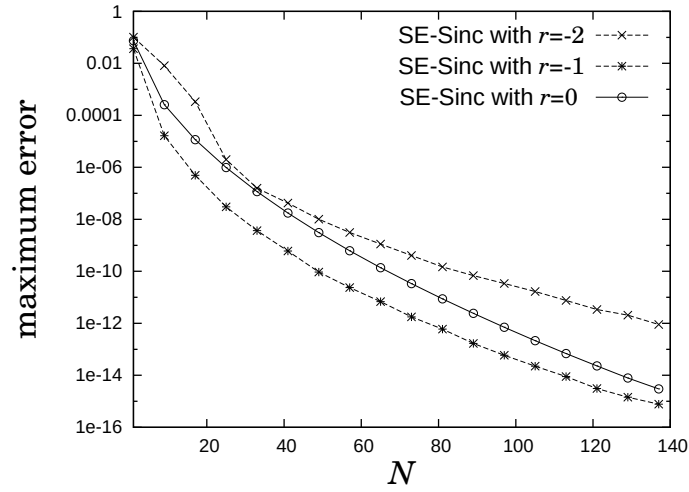


図 3.7 方程式 (3.13) に対する SE-Sinc-Nyström 法の h を式 (3.23) で定めて $r = -2, -1, 0$ と変化させた計算結果. 理論的には $r = 0$ (実線) が最適.

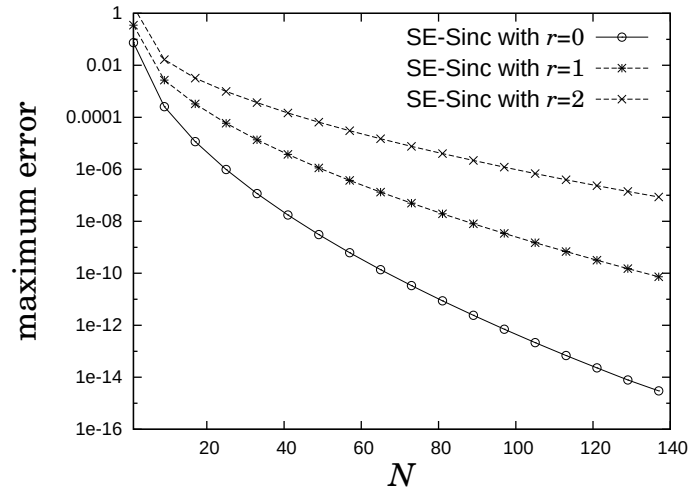


図 3.8 方程式 (3.13) に対する SE-Sinc-Nyström 法の h を式 (3.23) で定めて $r = 0, 1, 2$ と変化させた計算結果. 理論的には $r = 0$ (実線) が最適.

DE-Sinc-Nyström 法の場合は

$$h = \frac{\log(2^r \pi_m N)}{N} \quad (3.24)$$

とし, $r = -2, -1, 0, 1, 2$ と動かした場合の数値実験結果を図 3.9 と図 3.10 に示す. やはり $r = 0$ が最適のはずであるが, 図から判断すると, r が小さい方が収束が速い. これは §3.4.1 における数値実験の場合と同じ結果である. この現象に関する考察は §3.4.3 で述べる.

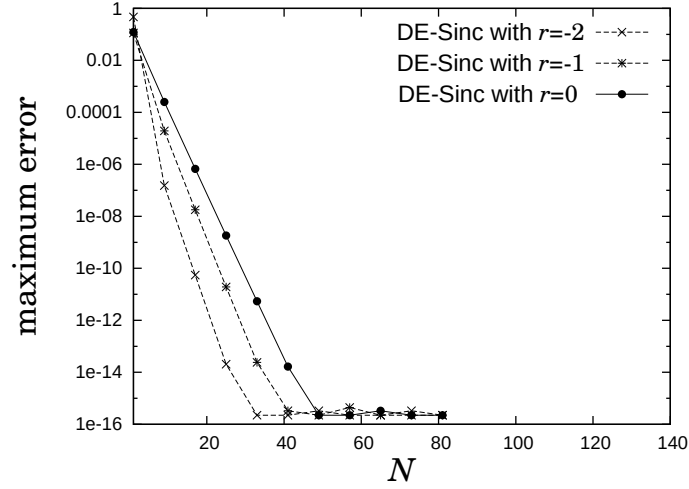


図 3.9 方程式 (3.13) に対する DE-Sinc-Nyström 法の h を式 (3.24) で定めて $r = -2, -1, 0$ と変化させた計算結果. 理論的には $r = 0$ (実線) が最適.

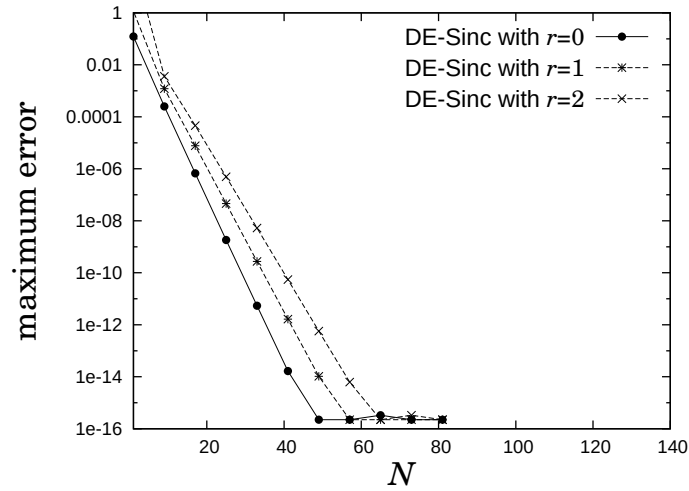


図 3.10 方程式 (3.13) に対する DE-Sinc-Nyström 法の h を式 (3.24) で定めて $r = 0, 1, 2$ と変化させた計算結果. 理論的には $r = 0$ (実線) が最適.

3.4.3 DE 変換を用いる場合のパラメータの値と収束性に関する考察

数値実験では, DE 変換を用いる場合には, パラメータを最適値よりも小さくとる方が収束が速くなっていた. これは次のことが理由として考えられる. DE-Sinc-Nyström 法が近似に用いている DE-Sinc 不定積分は, 離散化誤差が $O(h e^{-\pi d/h})$ で, 打ち切り誤差が $O(e^{-\frac{\pi}{2} \exp(Nh)})$ と評価される (詳しい解析は §9.4.3 を参照). よって, DE-Sinc 不定積分の誤差はある定数 C_D と C_T を用いて

$$|\text{DE-Sinc 不定積分の誤差}| \leq C_D h e^{-\pi d/h} + C_T e^{-\frac{\pi}{2} \exp(Nh)} \quad (3.25)$$

と評価される．ここで， h を一般に

$$h = \frac{\log(cN)}{N} \quad (3.26)$$

で定めることにして代入すると，

$$\begin{aligned} & | \text{DE-Sinc 不定積分の誤差} | \\ & \leq C_D \frac{\log(cN)}{N} e^{-\pi d N / \log(cN)} + C_T e^{-\frac{\pi}{2} c N} \\ & = \left\{ C_D + C_T \frac{N}{\log(cN)} e^{-\frac{\pi}{2} N(c-2d/\log(cN))} \right\} \frac{\log(cN)}{N} e^{-\pi d N / \log(cN)} \end{aligned} \quad (3.27)$$

と評価でき，右辺の $\{\cdot\}$ の部分は N に依存しない定数で評価できるので，収束次数は $O(\log(cN) e^{-\pi d N / \log(cN)} / N)$ となる．この評価をみると， c は小さくとした方が DE-Sinc 不定積分の収束が速くなることがわかる．

ところが， c を小さくとりすぎると，定数となる $\{\cdot\}$ の部分の値が大きくなることにも注意．実際に図 3.4 や図 3.9 をみると， N が小さいときの誤差は， r を小さくとした場合の方が最適の場合に比べて大きくなっており，これは定数が大きいくことを示唆している．従来の $c = 2d$ と定める方法は，定数の増大を押さえつつ，なるべく収束を速めるバランスのとれた定め方と言える．

3.5 証明：解 u の性質の解析

ここでは定理 3.2 の証明を行う．まず，関数 k は任意の $z, w \in \overline{\mathcal{D}}$ で $k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$, $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ をみたすものとし， $f \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ に対して線形作用素 $\mathcal{V}: \mathbf{HC}(\mathcal{D}) \rightarrow \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ を

$$\mathcal{V}[f](z) = \int_a^z k(z, w) f(w) dw \quad (3.28)$$

と定義する．このとき $\mathcal{I}$ を恒等作用素とすれば，方程式 (1.1) は $(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{V})u = g$ と表せる．この作用素 $\mathcal{V}$ に関して，次の補題より，ある自然数 n_0 が存在して，任意の $n \geq n_0$ で $\mathcal{V}^n$ は縮小写像となることがわかる．

補題 3.8 (岡山ら [91, 補題 4.5]) 任意の $z, w \in \overline{\mathcal{D}}$ に対し， $k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ かつ $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ とし，また $f \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ であるとする．このとき，

$$M_k = \max_{z, w \in \overline{\mathcal{D}}} |k(z, w)| \quad (3.29)$$

とおくと，任意の自然数 n に対して次の評価が成り立つ：

$$\|\mathcal{V}^n f\|_{\mathbf{HC}(\mathcal{D})} \leq \frac{\{M_k(b-a)c_d\}^n}{n!} \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathcal{D})}. \quad (3.30)$$

ただし c_d は d のみに依存する定数である ($\mathcal{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ or $\mathcal{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ に注意)．

このことから、縮小写像の原理を用いると、定理 3.2 が成り立つことがわかる。

以下ではこの補題 3.8 を SE 変換の場合と DE 変換の場合に分けて証明する。まず、SE 変換を用いた場合について示すが、補題を一つ用意しておく。

補題 3.9 (岡山ら [91, 補題 A.1]) d を $0 < d < \pi$ をみたす定数、 x を任意の実数とする。このとき、

$$\psi_1(x) = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{2} \quad (3.31)$$

とおくと、 $|y| \leq d$ をみたす任意の実数 y に対し、

$$|\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(x + iy)| \leq (b - a)c_1\psi_1'(x) \quad (3.32)$$

と評価できる。ただし c_1 は d のみに依存する正の定数である。

証明. まず $|\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(x + iy)|$ を

$$|\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(x + iy)| = \frac{b - a}{4} \frac{1}{|\cosh((x + iy)/2)|^2} = \frac{b - a}{4} \frac{1}{\cosh^2(x/2) - \sin^2(y/2)} \quad (3.33)$$

と変形した後、

$$\begin{aligned} \frac{b - a}{4} \frac{1}{\cosh^2(x/2) - \sin^2(y/2)} &\leq \frac{b - a}{4} \frac{1}{\cosh^2(x/2)\{1 - \sin^2(y/2)\}} \\ &= \frac{b - a}{\cos^2(y/2)} \psi_1'(x) \\ &\leq \frac{b - a}{\cos^2(d/2)} \psi_1'(x) \end{aligned} \quad (3.34)$$

と評価すればよい。 ■

式 (3.31) で定められる $\psi_1(x)$ は $0 \leq \psi_1(x) \leq 1$ と評価できることより、補題 3.8 を示すには次の補題を示せば十分である。

補題 3.10 (岡山ら [91, 補題 A.2]) $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ とおく。任意の $z, w \in \overline{\mathfrak{D}}$ に対し、 $k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ かつ $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ とし、また $f \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ であるとする。このとき、関数 ψ_1 を式 (3.31) で定め、定数 M_k を式 (3.29) で定めると、任意の $z \in \mathfrak{D}$ と任意の自然数 n に対して次の評価が成り立つ：

$$|\mathcal{V}^n[f](z)| \leq \frac{\{M_k(b - a)c_1\psi_1(x)\}^n}{n!} \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})}. \quad (3.35)$$

ただし $x = \text{Re}[\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(z)]$ であり、 c_1 は d のみに依存する正の定数である。

証明. $y = \text{Im}[\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(z)]$ とおくと、変数 z は $z = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(x + iy)$ と表せる。まず $n = 1$ について考えると、 $w = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(t + iy)$ と変数変換すれば、

$$\begin{aligned} \mathcal{V}[f](z) &= \int_a^z k(z, w) f(w) dw \\ &= \int_{-\infty}^x k(z, \psi_{a,b}^{\text{SE}}(t + iy)) f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(t + iy)) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(t + iy) dt \end{aligned} \quad (3.36)$$

と変形できるので, 補題 3.9 を用いると

$$|\mathcal{V}[f](z)| \leq M_k(b-a)c_1\|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} \int_{-\infty}^x \psi'_1(t) dt = M_k(b-a)c_1\|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})}\psi_1(x) \quad (3.37)$$

と評価できる. よって $n = 1$ で式 (3.35) は成立する. 次に, 同様の変数変換によって

$$\mathcal{V}[\mathcal{V}^n f](z) = \int_{-\infty}^x k(z, \psi_{a,b}^{\text{SE}}(t + iy)) \mathcal{V}^n[f](\psi_{a,b}^{\text{SE}}(t + iy)) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(t + iy) dt \quad (3.38)$$

であるから, n で式 (3.35) が成立しているとする, と

$$\begin{aligned} |\mathcal{V}^{n+1}[f](z)| &\leq M_k \int_{-\infty}^x \frac{\{M_k(b-a)c_1\psi_1(t)\}^n}{n!} \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} (b-a)c_1\psi'_1(t) dt \\ &= \frac{\{M_k(b-a)c_1\psi_1(x)\}^{n+1}}{(n+1)!} \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} \end{aligned} \quad (3.39)$$

が得られる. よって帰納法により, 補題の主張が成り立つ. ■

次に, DE 変換を用いた場合について示す. まず, 次の補題が成り立つ (補題 9.30 の特別な場合).

補題 3.11 (Okayama et al. [95, Lemma 4.21]) x を任意の実数, y を $|y| < \pi/2$ をみたす実数とする. このとき, 次の評価が成り立つ:

$$\frac{1}{|\cosh^2(\frac{\pi}{2} \sinh(x + iy))|} \leq \frac{1}{\cosh^2(\frac{\pi}{2} \sinh(x) \cos y) \cos^2(\frac{\pi}{2} \sin y)}. \quad (3.40)$$

これより, 補題 3.9 に対応して, 次を示せる.

補題 3.12 (岡山ら [91, 補題 A.4]) d を $0 < d < \pi/2$ をみたす定数, x を任意の実数とする. このとき,

$$\psi_2(x) = \frac{1}{2} \tanh\left(\frac{\pi \cos d}{2} \sinh(x)\right) + \frac{1}{2} \quad (3.41)$$

とおくと, $|y| \leq d$ をみたす任意の実数 y に対し,

$$|\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(x + iy)| \leq (b-a)c_2\psi'_2(x) \quad (3.42)$$

と評価できる. ただし c_2 は d のみに依存する正の定数である.

証明. 補題 3.11 と

$$|\cosh(x + iy)| = \sqrt{\cosh^2(x) - \sin^2(y)} \leq \cosh(x) \quad (3.43)$$

を用いると,

$$|\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(x + iy)| = \frac{(b-a)\pi |\cosh(x + iy)|}{4 |\cosh^2(\frac{\pi}{2} \sinh(x + iy))|} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{(b-a)\pi \cosh(x)}{4 \cosh^2(\frac{\pi}{2} \sinh(x) \cos y) \cos^2(\frac{\pi}{2} \sin y)} \\ &\leq \frac{(b-a)\pi \cosh(x)}{4 \cosh^2(\frac{\pi}{2} \sinh(x) \cos d) \cos^2(\frac{\pi}{2} \sin d)} \\ &= \frac{(b-a)}{\cos^2(\frac{\pi}{2} \sin d) \cos d} \psi_2'(x) \end{aligned} \quad (3.45)$$

のようにして望む評価が得られる. ■

式 (3.41) で定められる $\psi_2(x)$ も $0 \leq \psi_2(x) \leq 1$ と評価できるので, 補題 3.8 を示すには次の補題を示せばよい.

補題 3.13 (岡山ら [91, 補題 A.5]) $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ とおく. 任意の $z, w \in \overline{\mathfrak{D}}$ に対し, $k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ かつ $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ とし, また $f \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ であるとする. このとき, 関数 ψ_2 を式 (3.41) で定め, 定数 M_k を式 (3.29) で定めると, 任意の $z \in \overline{\mathfrak{D}}$ と任意の自然数 n に対して次の評価が成り立つ:

$$|\mathcal{V}^n[f](z)| \leq \frac{\{M_k(b-a)c_2\psi_2(x)\}^n}{n!} \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})}. \quad (3.46)$$

ただし $x = \text{Re}[\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(z)]$ で, c_2 は d のみに依存する定数である.

証明. 補題 3.10 の証明で, SE 変換を DE 変換に, ψ_1 を ψ_2 に置き換えればよい. ■

3.6 証明：スキームの可解性と収束性の解析

3.6.1 SE-Sinc-Nyström 法に対して

ここでは, 定理 3.4 の証明を行う.

証明の流れ

積分 $\mathcal{V}f$ を SE-Sinc 不定積分で近似した式を

$$\mathcal{V}_N^{\text{SE}}[f](t) = \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) J(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \quad (3.47)$$

とおき, 元々の方程式 (1.1) (これは $(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{V})u = g$ と表せる) に加えて, 次の二つの方程式

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{V}_N^{\text{SE}})v = g, \quad (3.48)$$

$$(\lambda I_m - V_m^{\text{SE}})c_m = g_m^{\text{SE}} \quad (3.49)$$

を考える. それぞれ, 元の方程式を近似した方程式 (3.9), 連立 1 次方程式 (3.12) と同一の方程式である. スキームの一意可解性を示すために, 定理 3.2 の仮定の下で

1. 方程式 (3.48) が一意可解であれば方程式 (3.49) は一意可解 (補題 3.14).
2. 十分大きな N では方程式 (3.48) は一意可解 (補題 3.21).

を順に示して証明する. 最後に補題 3.14 と補題 3.21 を用いて定理 3.4 を示す.

ステップ 1. 方程式 (3.48) が一意可解であれば方程式 (3.49) は一意可解

次の補題が成立する.

補題 3.14 次の二つは同値である:

- (A) 方程式 (3.48) には一意解 $v \in \mathbf{X}$ が存在する.
- (B) 方程式 (3.49) には一意解 $\mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^m$ が存在する.

証明. (B) $\Rightarrow$ (A) も同様に示される^{*2}ので, ここでは (A) $\Rightarrow$ (B) のみ示す. 方程式 (3.48) の一意解 $v \in \mathbf{X}$ を用いて $\mathbf{c}_m = [v(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(-Nh)), \dots, v(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(Nh))]^\top$ とおくと, この $\mathbf{c}_m$ は方程式 (3.49) の解である. よって方程式 (3.49) には解が存在する. 次に, 方程式 (3.49) に異なる解 $\tilde{\mathbf{c}}_m = [\tilde{c}_{-N}, \dots, \tilde{c}_m]^\top$ が存在したとする. このとき, この $\tilde{\mathbf{c}}_m$ を用いて関数 $\tilde{v} \in \mathbf{X}$ を

$$\tilde{v}(t) = \frac{1}{\lambda} \left\{ g(t) + \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \tilde{c}_j \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) J(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \right\} \quad (3.50)$$

と定めると, 選点上 $t = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih)$ ($i = -N, \dots, N$) においては

$$\lambda \tilde{v}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih)) = g(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih)) + h \sum_{j=-N}^N k(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih), \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \tilde{c}_j \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \delta_{ij}^{(-1)} \quad (3.51)$$

が成り立つ. 一方 $\tilde{c}_j$ は連立 1 次方程式 (3.49) の解なので

$$\lambda \tilde{c}_i = g(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih)) + h \sum_{j=-N}^N k(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih), \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \tilde{c}_j \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \delta_{ij}^{(-1)} \quad (3.52)$$

が成り立つ. よって $\tilde{v}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih)) = \tilde{c}_i$ であるので, 式 (3.50) は

$$\tilde{v}(t) = \frac{1}{\lambda} \left\{ g(t) + \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \tilde{v}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) J(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \right\} \quad (3.53)$$

と書き換えられる. これは $\tilde{v}$ が方程式 (3.48) の解であることを示している. ところで, 仮定より方程式 (3.48) の解は一意であったので, $v = \tilde{v}$ である. したがって $\mathbf{c}_m = \tilde{\mathbf{c}}_m$ が結論されるので, 補題は示された. ■

^{*2} 例えば補題 4.9 の証明を参照のこと. そこでは (B) $\Rightarrow$ (A) を示しており, その証明と全く同様に行える.

ステップ 2. 十分大きな N では方程式 (3.48) は一意可解

SE-Sinc-Nyström 法だけでなく，一般に Nyström 法の誤差解析には，次の定理を用いるのが通例である．

定理 3.15 (Atkinson [8, Theorem 4.1.1]) 以下の四つの条件を仮定する：

1. 作用素 $\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}_n$ は $\mathbf{X}$ をそれ自身に写す有界線形作用素．
2. $(\mathcal{I} - \mathcal{X})$ には有界な逆作用素 $(\mathcal{I} - \mathcal{X})^{-1} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ が存在．
3. $\mathcal{X}_n$ は $\mathbf{X}$ 上のコンパクト作用素．
4. 次の不等式が成り立つ：

$$\|(\mathcal{X} - \mathcal{X}_n)\mathcal{X}_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} < \frac{1}{\|(\mathcal{I} - \mathcal{X})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}}. \quad (3.54)$$

このとき $(\mathcal{I} - \mathcal{X}_n)$ には逆作用素 $(\mathcal{I} - \mathcal{X}_n)^{-1} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ が存在し，これは有界であって

$$\|(\mathcal{I} - \mathcal{X}_n)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \leq \frac{1 + \|(\mathcal{I} - \mathcal{X})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \|\mathcal{X}_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}}{1 - \|(\mathcal{I} - \mathcal{X})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \|(\mathcal{X} - \mathcal{X}_n)\mathcal{X}_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}} \quad (3.55)$$

と評価できる．さらに方程式 $(\mathcal{I} - \mathcal{X})u = g$ の解 u と方程式 $(\mathcal{I} - \mathcal{X}_n)v = g$ の解 v の誤差は次のように評価できる：

$$\|u - v\|_{\mathbf{X}} \leq \|(\mathcal{I} - \mathcal{X}_n)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \|\mathcal{X}u - \mathcal{X}_n u\|_{\mathbf{X}}. \quad (3.56)$$

今回においては，この定理の四つの条件が， $(\mathcal{X} = \mathcal{V}, \mathcal{X}_n = \mathcal{V}_N^{\text{SE}})$ として) 定理 3.2 の仮定の下で成り立つことを示す必要がある．まず条件 1 は明らかに成り立つ．条件 2 が成り立つための条件は，次のように (古くより) 知られている．

定理 3.16 (Brunner [15, p. 58]) $k \in C([a, b] \times [a, b])$ とする．このとき，作用素 $(\mathcal{I} - \mathcal{V}) : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ は有界な逆作用素 $(\mathcal{I} - \mathcal{V})^{-1} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ を持つ．さらに $g \in \mathbf{X}$ であれば，方程式 (1.1) には唯一解 $u \in \mathbf{X}$ が存在する．

定理 3.2 の仮定の下でこの定理の条件は明らかに成り立つ．また，条件 3 は Arzelà–Ascoli の定理より直ちに示される．よってあと示すべきは条件 4 である．そのために補題を二つ用意しておく．

補題 3.17 (Stenger [135, Lemma 3.6.5]) $h > 0, j \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$ のとき，次が成り立つ：

$$\left| \int_{-\infty}^x S(j, h)(t) dt \right| \leq 1.1h. \quad (3.57)$$

この補題を複素平面上の評価に拡張したものが，次の補題である．

補題 3.18 (岡山ら [91, 補題 7.6]) $h > 0, j \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$ のとき，次が成り立つ：

$$\left| \int_{-\infty}^{x+iy} S(j, h)(\zeta) d\zeta \right| \leq \frac{5h}{\pi} \cdot \frac{\sinh(\pi y/h)}{\pi y/h}. \quad (3.58)$$

証明. まず, 積分路を

$$\int_{-\infty}^{x+iy} S(j, h)(\zeta) d\zeta = \int_{-\infty}^x S(j, h)(\xi) d\xi + \int_0^y S(j, h)(x + i\eta) d\eta \quad (3.59)$$

のように分けた後, それぞれの積分を評価すればよい. 第一項は補題 3.17 より,

$$\left| \int_{-\infty}^x S(j, h)(\xi) d\xi \right| \leq 1.1h \leq \frac{7h}{2\pi} \leq \frac{7h}{2\pi} \cdot \frac{\sinh(\pi y/h)}{\pi y/h} \quad (3.60)$$

が成り立つ. 一方,

$$|S(j, h)(x + i\eta)| = \frac{h}{2\pi} \left| \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{\eta t + i(jh-x)t} dt \right| \leq \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{\eta t} dt = \frac{\sinh(\pi\eta/h)}{\pi\eta/h} \quad (3.61)$$

の評価と, 一般に任意の実数 r に対し

$$\int_0^{|r|} \frac{\sinh(t)}{t} dt \leq \frac{3}{2} \frac{\sinh(r)}{r} \quad (3.62)$$

が成り立つことを用いると, 第二項は

$$\begin{aligned} \left| \int_0^y S(j, h)(x + i\eta) d\eta \right| &\leq \int_0^{|y|} \frac{\sinh(\pi\eta/h)}{\pi\eta/h} d\eta \\ &= \frac{h}{\pi} \int_0^{\pi|y|/h} \frac{\sinh(t)}{t} dt \\ &\leq \frac{3h}{2\pi} \cdot \frac{\sinh(\pi y/h)}{\pi y/h} \end{aligned} \quad (3.63)$$

と評価できる. 以上より補題の主張が成り立つ. ■

以上の補題より, $\|(\mathcal{V} - \mathcal{V}_N^{\text{SE}})\mathcal{V}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ に対し次のような評価が成り立つ.

補題 3.19 (岡山ら [91, 補題 7.7]) 関数 k は定理 3.2 の仮定を $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathscr{D}_d)$ としてみたすとする. このとき, N によらない定数 C が存在して,

$$\|(\mathcal{V} - \mathcal{V}_N^{\text{SE}})\mathcal{V}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \leq Ch \quad (3.64)$$

と評価できる. ただし h は自然数 N に対し式 (1.8) で定められる刻み幅である.

証明. 補題を示すには, f と N に依存しない定数 C が存在して, 任意の $f \in \mathbf{X}$ に対し

$$\|(\mathcal{V} - \mathcal{V}_N^{\text{SE}})\mathcal{V}_N^{\text{SE}}f\|_{\mathbf{X}} \leq C\|f\|_{\mathbf{X}}h \quad (3.65)$$

と評価できることを示せばよい. 簡便のために,

$$F_i(t, s) = k(t, s)k(s, \psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih)) \int_{-\infty}^{\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)} S(i, h)(\sigma) d\sigma \quad (3.66)$$

とおくと、式 (2.39) の $\mathcal{Q}_N^{\text{SE}}$ を用いて $(\mathcal{V} - \mathcal{V}_N^{\text{SE}})\mathcal{V}_N^{\text{SE}}[f](t)$ は次のように変形できる：

$$\begin{aligned} & (\mathcal{V} - \mathcal{V}_N^{\text{SE}})\mathcal{V}_N^{\text{SE}}[f](t) \\ &= \frac{\mathcal{Q}_N^{\text{SE}} f}{h} \left\{ \int_a^t F_i(t, s) ds - \sum_{j=-N}^N F_i(t, \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \int_{-\infty}^{\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)} S(j, h)(\sigma) d\sigma \right\}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

まず $\{\cdot\}$ の部分を評価する．ここで式 (3.29) の M_k と、補題 3.18 を用いれば、任意の整数 i と $t \in [a, b]$, $z \in \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ に対し

$$|F_i(t, z)| \leq M_k^2 \frac{5h}{\pi} \cdot \frac{\sinh(\pi d/h)}{\pi d/h} \quad (3.68)$$

と評価できる．したがって関数 $F_i(t, \cdot)$ は定理 2.26 の仮定をみたす．よって、誤差の式 (2.69) と定数の式 (2.70) に注意すると、

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^t F_i(t, s) ds - \sum_{j=-N}^N F_i(t, \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \int_{-\infty}^{\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(x)} S(j, h)(\sigma) d\sigma \right| \\ & \leq \left\{ M_k^2 \frac{5h}{\pi} \cdot \frac{\sinh(\pi d/h)}{\pi d/h} \right\} C_{1,1,d}^{\text{SE}}(b-a) e^{-\sqrt{\pi d N}} \\ & = \frac{5M_k^2 C_{1,1,d}^{\text{SE}}(b-a)}{\pi^2 d} \cdot h^2 \left[\sinh(\pi d/h) e^{-\pi d/h} \right] \end{aligned} \quad (3.69)$$

と評価できる．ただし最後の等式で、式 (1.8) より $e^{-\sqrt{\pi d N}} = e^{-\pi d/h}$ が成り立つことを用いた．さらに上式の $[\cdot]$ は

$$\sinh(\pi d/h) e^{-\pi d/h} = \frac{e^{\pi d/h} - e^{-\pi d/h}}{2} e^{-\pi d/h} \leq \frac{1}{2} \quad (3.70)$$

と評価できる．一方、後に示す補題 4.15 の主張 2 より、 f と N に依存しない定数 $\tilde{C}$ が存在して

$$\frac{|\mathcal{Q}_N^{\text{SE}} f|}{\|f\|_{\mathbf{x}}} \leq \tilde{C} \quad (3.71)$$

と評価できる．以上より、式 (3.65) が成り立つことがわかるので、補題は示された. ■

$N \rightarrow \infty$ で $h \rightarrow 0$ であるので、この補題より $\|(\mathcal{V} - \mathcal{V}_N^{\text{SE}})\mathcal{V}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \rightarrow 0$ となることから、ある N_0 以上で条件 4 が成り立つことがわかる．最後の準備として、次の補題を示す．

補題 3.20 (岡山ら [100, 補題 7.8]) $k \in C([a, b] \times [a, b])$ とする．このとき、 $\tilde{M}_k = \max_{t,s \in [a,b]} |k(t, s)|$ とおくと、次の評価が成り立つ：

$$\|\mathcal{V}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \leq 1.1 \tilde{M}_k \|\mathcal{Q}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbb{R})}. \quad (3.72)$$

証明. 補題 3.17 に注意すると, 任意の $f \in \mathbf{X}$ に対し

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{V}_N^{\text{SE}}[f](t)| &= \left| \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) J(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \right| \\
 &\leq \tilde{M}_k \|f\|_{\mathbf{X}} 1.1h \sum_{j=-N}^N \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \\
 &= \tilde{M}_k \|f\|_{\mathbf{X}} 1.1 \|\mathcal{Q}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbb{R})}
 \end{aligned} \tag{3.73}$$

と評価できるので, 補題の主張が示された. ■

以上をまとめると, 次の補題が成り立つ.

補題 3.21 定理 3.2 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする. このとき, ある N_0 が存在して, 任意の $N \geq N_0$ に対し方程式 (3.48) には一意解 $v \in \mathbf{X}$ が存在する. さらに N に依存しない定数 C が存在して, 誤差は次のように評価できる:

$$\|u - v\|_{\mathbf{X}} \leq C \|\mathcal{V}u - \mathcal{V}_N^{\text{SE}}u\|_{\mathbf{X}}. \tag{3.74}$$

証明. 定理 3.15 の条件はみたされているので, あと $\|(\mathcal{I} - \mathcal{V}_N^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ が一様有界であることだけ示せばよい. そのためには, 式 (3.55) より, $\|\mathcal{V}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ と $\|(\mathcal{V} - \mathcal{V}_N^{\text{SE}})\mathcal{V}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ を調べればよい. 後に示す補題 4.15 の主張 2 より, $\|\mathcal{Q}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbb{R})}$ は一様有界であるので, 補題 3.20 より $\|\mathcal{V}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ も一様有界である. さらに $\|(\mathcal{V} - \mathcal{V}_N^{\text{SE}})\mathcal{V}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \rightarrow 0$ を考慮すれば, $\|(\mathcal{I} - \mathcal{V}_N^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ はある N_0 以上で一様有界であることがわかる. ■

最終ステップ. 定理 3.4 の証明

補題 3.14 と補題 3.21 の結果を用いて, 定理 3.4 は次のように示すことができる.

証明. 補題 3.21 において, あと $\|\mathcal{V}u - \mathcal{V}_N^{\text{SE}}u\|_{\mathbf{X}}$ を評価すればよい. 定理 3.2 より, $u \in \mathbf{H}^\infty(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ であるので, $uQ \in \mathbf{L}_1(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ となる. よって定理 2.26 より, ある定数 $\tilde{C}$ が存在して

$$\|\mathcal{V}u - \mathcal{V}_N^{\text{SE}}u\|_{\mathbf{X}} \leq \tilde{C} e^{-\sqrt{\pi d N}} \tag{3.75}$$

と評価できる. 以上で定理は証明された. ■

3.6.2 DE-Sinc-Nyström 法に対して

ここでは, 定理 3.5 の証明を行う.

証明の流れ

証明の流れはほとんど SE-Sinc-Nyström 法の場合と同様である．積分 $\mathcal{V}f$ を DE-Sinc 不定積分で近似した式を

$$\mathcal{V}_N^{\text{DE}}[f](t) = \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh)) f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) J(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \quad (3.76)$$

とおき，元々の方程式 (1.1) に加えて，次の二つの方程式

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{V}_N^{\text{DE}})v = g, \quad (3.77)$$

$$(\lambda I_m - V_m^{\text{DE}})\mathbf{c}_m = \mathbf{g}_m^{\text{DE}} \quad (3.78)$$

を考える．それぞれ，元の方程式を近似した方程式 (3.2)，連立 1 次方程式 (3.6) と同一の方程式である．スキームの一意可解性を示すために，定理 3.2 の仮定の下で

1. 方程式 (3.77) が一意可解であれば方程式 (3.78) は一意可解（補題 3.22）．
2. 十分大きな N では方程式 (3.77) は一意可解（補題 3.25）．

を順に示して証明する．最後に補題 3.22 と補題 3.25 を用いて定理 3.5 を示す．

ステップ 1. 方程式 (3.77) が一意可解であれば方程式 (3.78) は一意可解

次の補題が成立する．証明は，補題 3.14 の証明において，SE 変換を DE 変換に置き換えればよい．

補題 3.22 次の二つは同値である：

- (A) 方程式 (3.77) には一意解 $v \in \mathbf{X}$ が存在する．
- (B) 方程式 (3.78) には一意解 $\mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^m$ が存在する．

ステップ 2. 十分大きな N では方程式 (3.77) は一意可解

定理 3.15 の四つの条件を ($\mathcal{X} = \mathcal{V}$, $\mathcal{X}_n = \mathcal{V}_N^{\text{DE}}$ として) 定理 3.2 の仮定の下で成り立つことを示す．SE 変換の場合と同様，ここでは条件 4 を示す． $\|(\mathcal{V} - \mathcal{V}_N^{\text{DE}})\mathcal{V}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ に対し，次のような評価が成り立つ．

補題 3.23 (岡山ら [91, 補題 9.4]) 関数 k は定理 3.2 の仮定を $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathscr{D}_d)$ としてみたすとする．このとき， N によらない定数 C が存在して，

$$\|(\mathcal{V} - \mathcal{V}_N^{\text{DE}})\mathcal{V}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \leq Ch^2 \quad (3.79)$$

と評価できる．ただし h は自然数 N に対し式 (1.9) で定められる刻み幅である．

証明． 補題 3.19 の証明で ‘SE’ を ‘DE’ に置き換え， h と N の関係に注意して定理 2.27 を用

いれば,

$$|(\mathcal{V} - \mathcal{V}_N^{\text{DE}})\mathcal{V}_N^{\text{DE}}[f](t)| \leq \frac{|\mathcal{Q}_N^{\text{DE}} f|}{h} \left\{ \frac{5M_k^2 C_{1,1,d}^{\text{DE}}}{\pi^2 d} h^3 \sinh(\pi d/h) e^{-\pi d/h} \right\} \quad (3.80)$$

と評価できる. あと式 (3.71) と同様に, 後の補題 4.19 の主張 2 より, N と f に依存しない定数 $\tilde{C}$ によって

$$\frac{|\mathcal{Q}_N^{\text{DE}} f|}{\|f\|_{\mathbf{X}}} \leq \tilde{C} \quad (3.81)$$

と評価できることと, 不等式 (3.70) を用いればよい. ■

よって $N \rightarrow \infty$ において $\|(\mathcal{V} - \mathcal{V}_N^{\text{DE}})\mathcal{V}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \rightarrow 0$ となるので, ある N_0 以上で条件 4 が成り立つことがわかる. さらに, 補題 3.20 と同様に, 次の補題が成り立つ.

補題 3.24 (岡山ら [100, 補題 9.5]) $k \in C([a, b] \times [a, b])$ とする. このとき, $\tilde{M}_k = \max_{t,s \in [a,b]} |k(t, s)|$ とおくと, 次の評価が成り立つ:

$$\|\mathcal{V}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \leq 1.1 \tilde{M}_k \|\mathcal{Q}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbb{R})}. \quad (3.82)$$

以上をまとめると, 次の補題が成り立つ. 証明は補題 3.21 と同様である (‘SE’ を ‘DE’ に置き換えればよい).

補題 3.25 定理 3.2 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする. このとき, ある N_0 が存在して, 任意の $N \geq N_0$ に対し方程式 (3.77) には一意解 $v \in \mathbf{X}$ が存在する. さらに N に依存しない定数 C が存在して, 誤差は次のように評価できる:

$$\|u - v\|_{\mathbf{X}} \leq C \|\mathcal{V}u - \mathcal{V}_N^{\text{DE}}u\|_{\mathbf{X}}. \quad (3.83)$$

最終ステップ. 定理 3.5 の証明

補題 3.22 と補題 3.25 の結果を用いて, 定理 3.5 は次のように示すことができる.

証明. 補題 3.25 において, あと $\|\mathcal{V}u - \mathcal{V}_N^{\text{DE}}u\|_{\mathbf{X}}$ を評価すればよい. 定理 3.2 より, $u \in \mathbf{H}^\infty(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ であるので, $uQ \in \mathbf{L}_1(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ となる. よって定理 2.27 より, ある定数 $\tilde{C}$ が存在して

$$\|\mathcal{V}u - \mathcal{V}_N^{\text{DE}}u\|_{\mathbf{X}} \leq \tilde{C} \frac{\log(2dN)}{N} e^{-\pi dN / \log(2dN)} \quad (3.84)$$

と評価できる. 以上で定理は証明された. ■

第 4 章

Fredholm 積分方程式に対する Sinc-Nyström 法

本章では、Fredholm 積分方程式 (1.2) に対して Rashidinia–Zarebnia [113] によって提案された SE-Sinc-Nyström 法と、Muhammad et al. [82] によって提案された DE-Sinc-Nyström 法における、二つの論点について議論する。まず第 4.1 節で彼らの結果についてまとめた後、第 4.2 節で改善すべき二つの点について述べ、第 4.3 節においてそれを解決する本論文の結果を述べる。第 4.4 節では、本論文の結果が確認できる数値実験結果を示す。第 4.5 節では一つ目の点の結果に対する証明を、第 4.6 節では二つ目の点の結果に対する証明を行う。

4.1 Rashidinia–Zarebnia/Muhammad et al. による Sinc-Nyström 法

4.1.1 SE-Sinc-Nyström 法とその誤差解析

まず Rashidinia–Zarebnia [113] により導出された SE-Sinc-Nyström 法を説明する。ここでは、 $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ かつ任意の $t \in [a, b]$ に対して $k(t, \cdot) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ が成り立つとする。このとき $k(t, \cdot)u(\cdot)Q(\cdot) \in \mathbf{L}_1(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ となるので、方程式 (1.2) における積分は、定理 2.19 に基づいて

$$\int_a^b k(t, s)u(s)ds \approx h \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))u(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \quad (4.1)$$

と近似できる。ただし刻み幅 h は式 (2.56) に基づいて

$$h = \sqrt{\frac{2\pi d}{N}} \quad (4.2)$$

で定める。この近似により、次のような新たな方程式

$$\lambda u_N^{\text{SE}}(t) = g(t) + h \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))u_N^{\text{SE}}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \quad (4.3)$$

が得られる。方程式 (1.2) の代わりに、近似したこの方程式 (4.3) の解 u_N^{SE} を求めることを考える。それには、式 (4.3) の右辺の未知係数 $\mathbf{u}_m^{\text{SE}} = [u_N^{\text{SE}}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(-Nh)), \dots, u_N^{\text{SE}}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(Nh))]^\top$ を求めればよい。そこで、この方程式 (4.3) を式 (3.10) の m 点でサンプリングして、連立 1 次方程式をたてる。ここで $m \times m$ の行列 K_m^{SE} を

$$(K_m^{\text{SE}})_{ij} = hk(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih), \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \quad i, j = -N, \dots, N \quad (4.4)$$

とおき、さらに $\mathbf{g}_m^{\text{SE}} = [g(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(-Nh)), \dots, g(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(Nh))]^\top$ とおけば、解くべき連立 1 次方程式は

$$(\lambda I_m - K_m^{\text{SE}})\mathbf{u}_m^{\text{SE}} = \mathbf{g}_m^{\text{SE}} \quad (4.5)$$

と表される。この方程式 (4.5) を解いて得られた係数 $\mathbf{u}_m^{\text{SE}}$ を用いて、式 (4.3) より近似解 u_N^{SE} が求まる。これが SE-Sinc-Nyström 法である。

このスキームに対し、Rashidinia-Zarebnia [113] は次のような誤差解析を与えた。

定理 4.1 (Rashidinia-Zarebnia [113, Theorem 2]) 方程式 (1.2) の u と k は $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))^{*1}$ かつ任意の $t \in [a, b]$ に対し $k(t, \cdot) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ をみたすとする。このとき連立 1 次方程式 (4.5) を解いて式 (4.3) で u_N^{SE} を定めると、 N によらない定数 C が存在して

$$\|u - u_N^{\text{SE}}\|_{\mathbf{X}} \leq C\sqrt{N}\|(\lambda I_m - K_m^{\text{SE}})^{-1}\|_2 e^{-\sqrt{2\pi dN}} \quad (4.6)$$

が成り立つ。

4.1.2 DE-Sinc-Nyström 法とその誤差解析

次に、Muhammad et al. [82] により導出された DE-Sinc-Nyström 法について説明する。まず、 $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ かつ任意の $t \in [a, b]$ に対して $k(t, \cdot) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ が成り立つとする。このとき $k(t, \cdot)u(\cdot)Q(\cdot) \in \mathbf{L}_1(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ となるので、方程式 (1.2) における積分は、定理 2.23 に基づいて

$$\int_a^b k(t, s)u(s)ds \approx h \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))u(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) \quad (4.7)$$

と近似できる。ただし刻み幅 h は式 (2.61) に基づいて

$$h = \frac{\log(4dN)}{N} \quad (4.8)$$

で定める。この近似により、次のような新たな方程式

$$\lambda u_N^{\text{DE}}(t) = g(t) + h \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))u_N^{\text{DE}}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) \quad (4.9)$$

*1 この u の条件は原論文には記載されていないが、式 (4.1) の近似のために必須の条件である。

が得られる．方程式 (1.2) の代わりに，近似したこの方程式 (4.9) の解 u_N^{DE} を求めることを考える．それには，式 (4.9) の右辺の未知係数 $\mathbf{u}_m^{\text{DE}} = [u_N^{\text{DE}}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(-Nh)), \dots, u_N^{\text{DE}}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(Nh))]^\top$ を求めればよい．そこで，この方程式 (4.9) を式 (3.3) の m 点でサンプリングして，連立 1 次方程式をたてる．ここで $m \times m$ の行列 K_m^{DE} を

$$(K_m^{\text{DE}})_{ij} = hk(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(ih), \psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) \quad i, j = -N, \dots, N \quad (4.10)$$

とおき，さらに $\mathbf{g}_m^{\text{DE}} = [g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(-Nh)), \dots, g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(Nh))]^\top$ とおけば，解くべき連立 1 次方程式は

$$(\lambda I_m - K_m^{\text{DE}})\mathbf{u}_m^{\text{DE}} = \mathbf{g}_m^{\text{DE}} \quad (4.11)$$

と表せる．連立 1 次方程式 (4.11) を解いて係数 $\mathbf{u}_m^{\text{DE}}$ を求めれば，式 (4.9) によって近似解 u_N^{DE} が定まる．これが DE-Sinc-Nyström 法である．

このスキームに対し，Muhammad et al. [82] は次のような誤差解析を与えた．

定理 4.2 (Muhammad et al. [82, Theorem 3.4]) 方程式 (1.2) の u と k は $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ かつ任意の $t \in [a, b]$ に対し $k(t, \cdot) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ をみたすとする．このとき連立 1 次方程式 (4.11) を解いて式 (4.9) で u_N^{DE} を定めると， N によらない定数 C と C' が存在して，

$$\|u - u_N^{\text{DE}}\|_{\mathbf{X}} \leq (C\sqrt{N}\|(\lambda I_m - K_m^{\text{DE}})^{-1}\|_2 + C')e^{-2\pi dN/\log(4dN)} \quad (4.12)$$

が成り立つ*2．

4.2 Rashidinia–Zarebnia/Muhammad et al. の結果に関する議論

上述した Rashidinia–Zarebnia と Muhammad et al. による結果には，以下の二つの議論すべき点がある．

論点 1 (スキームが未知関数 u に依存) SE-Sinc-Nyström 法においては， $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ と仮定し，そのパラメータ d (これは正則領域の広さを表す) を用いて，刻み幅 h を式 (4.2) で定めている．また DE-Sinc-Nyström 法においても， $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ と仮定し，やはりそのパラメータ d を用いて，刻み幅 h を式 (4.8) で定めている．ところが解 u は，これから求めるべき未知関数であり，直接 u を調べて正則領域を知ることにはできない．そのため， d の値が定まらない場合，スキームを走らせることができないという問題がある．

論点 2 (スキームの可解性・収束性が未保証) Rashidinia–Zarebnia が与えた定理 4.1 と Muhammad et al. が与えた定理 4.2 では，暗黙のうちに連立 1 次方程式が可解である (係数行列 $\lambda I_m - K_m^{\text{SE}}$ や $\lambda I_m - K_m^{\text{DE}}$ に逆行列が存在する) ことを仮定している

*2 原論文では不等式 (4.12) の右辺にさらに $\log(N)/N$ が乗ぜられているが，これは記載ミスである．

が、これはスキームの可解性として別途示すべきことである。また、誤差評価式 (4.6) や (4.12) には、連立 1 次方程式の係数行列の逆行列の 2 ノルムが含まれているが、これは N に依存する項である ($m = 2N + 1$ に注意)。この項が N に対し未評価であるため、スキームの収束性も示されているとは言い難い。

4.3 主結果：Sinc-Nyström 法に対する理論解析

4.3.1 解 u の性質の解析 (論点 1)

本研究では、論点 1 に関して次のような結果を得た。証明は第 4.5 節で与える。

定理 4.3 (岡山ら [91, 定理 4.2]) 関数 g は $g \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ をみたし、また関数 k は任意の $z, w \in \overline{\mathfrak{D}}$ に対し $k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ かつ $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ をみたすとする。さらに、 $g \equiv 0$ のときの方程式 (1.2) の解は $u \equiv 0$ のみであるとする。このとき、方程式 (1.2) には唯一解 $u \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ が存在する。

SE 変換を用いる場合は、 $g, k(z, \cdot), k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathscr{D}_d))$ ならば $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathscr{D}_d))$ となることがこの定理で保証されるので、この d を式 (4.2) で用いればよい。同じく DE 変換を用いる場合も、関数 g と k の正則領域 $\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathscr{D}_d)$ を調べれば、この d を式 (4.8) で用いることができる。このように、定理 4.3 を用いることで、関数 u が不明な場合でも刻み幅 h の決定式で用いるパラメータ d を定められる。ここで、注意 3.3 で述べた内容と同じことが今回も言えることを注意しておく。

4.3.2 スキームの可解性・収束性の解析 (論点 2)

さらに本研究では、問題点 2 に関して次のような結果を得た。証明は第 4.6 節で与える。

定理 4.4 (岡山ら [93, 定理 4.1]) 定理 4.3 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathscr{D}_d)$ として成り立つとする。このとき、ある自然数 N_0 が存在して、任意の $N \geq N_0$ をみたす N に対し連立 1 次方程式 (4.5) は一意可解で、 N によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\|u - u_N^{\text{SE}}\|_{\mathbf{X}} \leq C e^{-\sqrt{2\pi d N}}. \quad (4.13)$$

定理 4.5 (岡山ら [93, 定理 4.2]) 定理 4.3 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathscr{D}_d)$ として成り立つとする。このとき、ある自然数 N_0 が存在して、任意の $N \geq N_0$ をみたす N に対し連立 1 次方程式 (4.11) は一意可解で、 N によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\|u - u_N^{\text{DE}}\|_{\mathbf{X}} \leq C e^{-2\pi d N / \log(4dN)}. \quad (4.14)$$

これらの定理では、連立 1 次方程式の可解性が示されている。さらに誤差評価式は、全て既知の N の関数であるので、 $N \rightarrow \infty$ で収束することだけでなく、その収束次数も示している。

4.4 数値実験

本節では先の定理を裏付ける数値実験結果を示す．実験の目的は，Sinc-Nyström 法において設定するパラメータ d を変更した場合に，収束性がどのように変化するかを確かめること（定理 4.3 に関連），そして収束速度の確認である（定理 4.4 と定理 4.5 に関連）．実装言語は C++ で，浮動小数点数には double 型を用いた．連立 1 次方程式を解くにあたっては LU 分解を用いた．また，区間は全て $[a, b] = [0, 2]$ である．

4.4.1 定理 4.3 によって最適の d の値が求まる場合

ここでは次のような方程式を考える．

例 4.6 次の第二種 Fredholm 積分方程式

$$u(t) = \sqrt{\frac{t}{2}} \left\{ 1 + \operatorname{arcsinh}(1) - \sqrt{2 + 2(t-1)^2} \right\} + \int_0^2 \sqrt{\frac{ts}{2}} u(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 2 \quad (4.15)$$

の解は $u(t) = \sqrt{t} \{1/\sqrt{2} - \sqrt{1 + (t-1)^2}\}$ である．

まず解析解が不明だとして，本論文の結果である定理 4.3 を用いて，パラメータ d を求めている．この方程式における関数 g と k は，SE 変換の場合は $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi/2})$ で定理 4.3 の条件をみたし，また DE 変換の場合は $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi/6})$ で定理 4.3 の条件をみたす．よって定理 4.3 より，解 u のパラメータ d は，SE 変換の場合は $d = \pi/2$ ，DE 変換の場合は $d = \pi/6$ であることがわかる．方程式 (4.15) の解析解でこの結果を確かめると，実際に $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi/2}))$ かつ $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi/6}))$ をみたすので，定理 4.3 の主張が正しいことが確認できる．このように，本論文の結果を用いると，解析解が不明の場合でもパラメータ d を求めることが可能であり，刻み幅 h を式 (4.2) や (4.8) で定めて計算を実行できる．

ところで，実は正しい d の値が不明の場合でも，何らかの値でこの d を設定すれば計算は（一応は）実行可能なはずである．そこで方程式 (4.15) に対して， d を正しく定めた場合と，そうでない場合で数値実験を行って比較する．第 2 章の脚注*5 で述べたように， d の値の上限は，SE 変換の場合は $d = \pi$ ，DE 変換の場合は $d = \pi/2$ であるので，正しい d が不明の場合に，これらの値で代用するのは一つの方法である（これは被近似関数に対し，全複素平面で正則だと期待することに対応する）．計算結果を図 4.1 に示す．ただし，図中の最大誤差（maximum error）は，区間 $[0, 2]$ を等分割した 101 点上での絶対誤差のうち，最も大きな値である．誤差の減少の様子を観察すると，いずれの方法でも $O(\exp(-c_1\sqrt{N}))$ または $O(\exp(-c_2N/\log N))$ のオーダーが確認される．ただし，正しく d の値を設定した場合（実線；SE-Sinc with $d = \pi/2$ ，DE-Sinc with $d = \pi/6$ ）に比べ， d を上限値で代用した場合（鎖線；SE-Sinc with $d = \pi$ ，DE-Sinc with $d = \pi/2$ ）は収束が遅いことがわかる．

また，上記の二種類以外で d を定めた場合の挙動にも興味があるので，SE-Sinc-Nyström

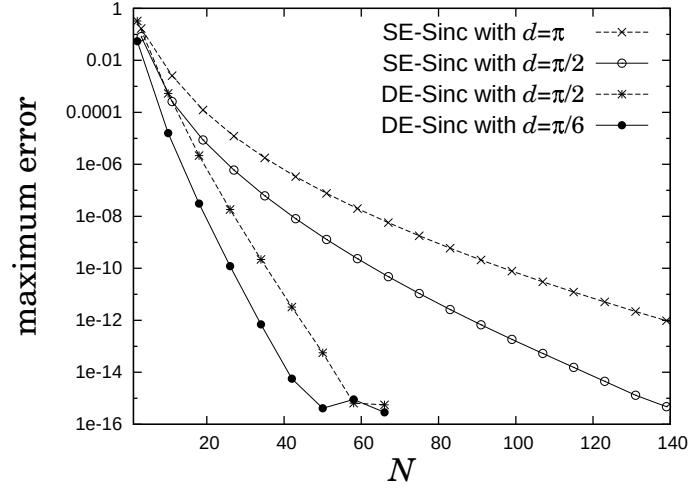


図 4.1 方程式 (4.15) に対する SE-Sinc-Nyström 法と DE-Sinc-Nyström 法の d の値を変えた計算結果: d を定理に従って定めた場合 (実線), d を上限値で代用した場合 (鎖線).

法の場合に,

$$h = \pi \sqrt{\frac{2r}{2N}} \quad (4.16)$$

とし, $r = -1, 0, 1, 2, 3$ と動かした場合の数値実験結果を図 4.2 と図 4.3 に示す. $r = 1$ の場合が理論的には最適であり, 実際に数値実験でも最も収束が速いことが確認できる.

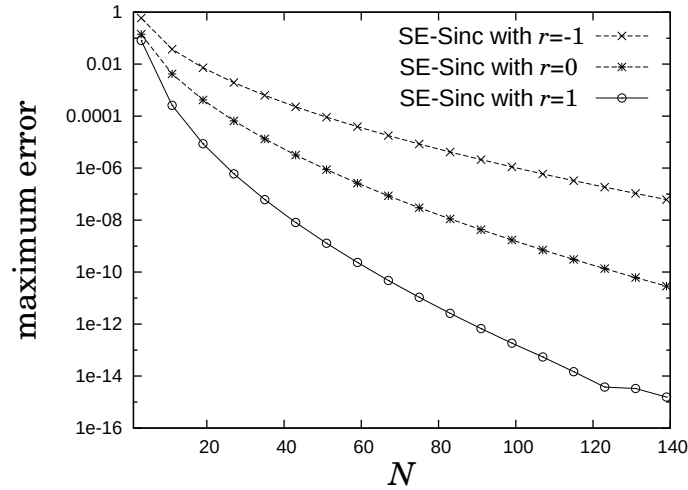


図 4.2 方程式 (4.15) に対する SE-Sinc-Nyström 法の h を式 (4.16) で定めて $r = -1, 0, 1$ と変化させた計算結果. 理論的には $r = 1$ が最適.

DE-Sinc-Nyström 法の場合は

$$h = \frac{\log(2^r \pi N/3)}{N} \quad (4.17)$$

とし, $r = -1, 0, 1, 2, 3$ と動かした場合の数値実験結果を図 4.4 と図 4.5 に示す. やはり

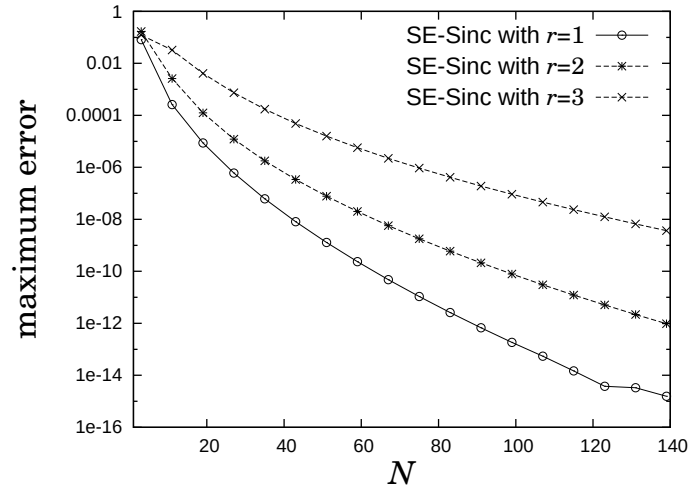


図 4.3 方程式 (4.15) に対する SE-Sinc-Nyström 法の h を式 (4.16) で定めて $r = 1, 2, 3$ と変化させた計算結果. 理論的には $r = 1$ が最適.

$r = 1$ が最適のはずであるが, 図から判断すると, r が小さい方が収束が速い. この現象に関する考察は §4.4.3 で述べる.

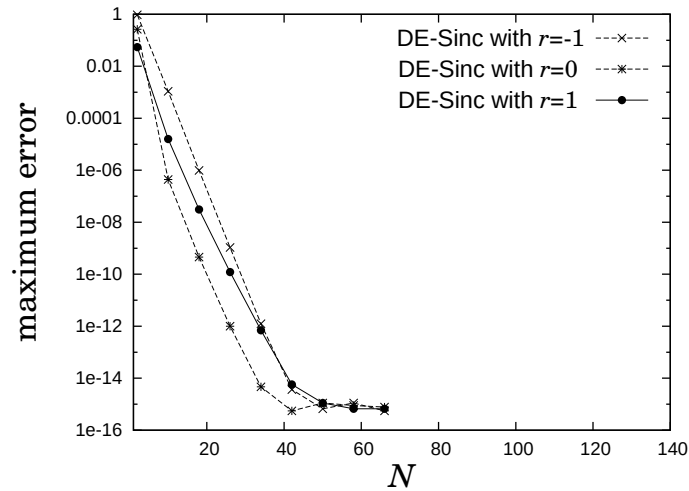


図 4.4 方程式 (4.15) に対する DE-Sinc-Nyström 法の h を式 (4.17) で定めて $r = -1, 0, 1$ と変化させた計算結果. 理論的には $r = 1$ が最適.

4.4.2 最適の d の値が定理 4.3 では求まらない場合

定理 4.3 の後で注意したように, パラメータ d の最適な値は, 定理 4.3 に基づいて求めた d よりも大きくなる場合が存在する. ここではその例として次の方程式を考える.

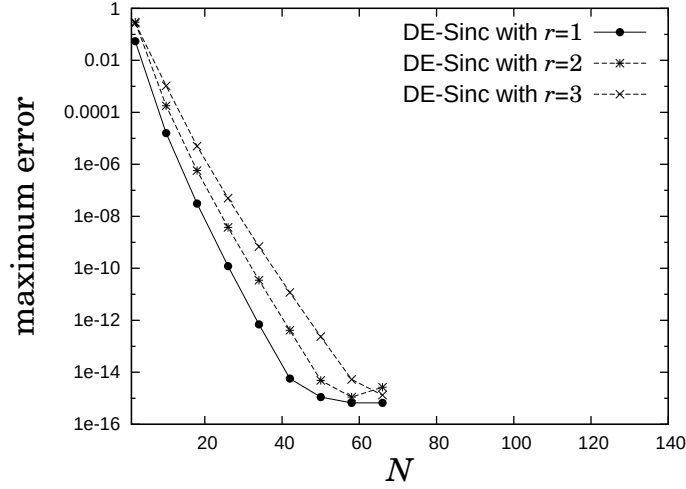


図 4.5 方程式 (4.15) に対する DE-Sinc-Nyström 法の h を式 (4.17) で定めて $r = 1, 2, 3$ と変化させた計算結果. 理論的には $r = 1$ が最適.

例 4.7 次の第二種 Fredholm 積分方程式

$$u(t) = \sqrt{1 + (1-t)^2} - 1 + \frac{3}{8} \int_0^2 \sqrt{1 + (1-s)^2} u(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 2 \quad (4.18)$$

を考える. 解は $u(t) = \sqrt{1 + (1-s)^2}$ である.

まず解析解が不明だとして, 本論文の結果である定理 4.3 を用いて, パラメータ d を求めてみる. この方程式における関数 g と k は, SE 変換の場合は $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi/2})$ で定理 4.3 の条件をみす. また DE 変換の場合は, $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi/6})$ で定理 4.3 の条件をみす. よって定理 4.3 より, 解 u のパラメータ d は, SE 変換の場合は $d = \pi/2$, DE 変換の場合は $d = \pi/6$ となる. 方程式 (4.18) の解析解でこの結果を確かめると, 実際に $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi/2}))$ かつ $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi/6}))$ であり, 定理 4.3 の主張は正しいことが確認できる. ただし, 被積分関数 $f = k(t, \cdot)u(\cdot)$ は $f \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi_m}))$ かつ $f \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi_m/2}))$ であり, 実際の最適な d の値は定理で得られた値よりも大きくなる例となっている.

今回は, d を定理 4.3 に従って定めた場合と, 最適値に定めた場合で計算を行った. 結果を図 4.6 に示す. d を最適値で定めた方が収束が速いと予想され, 実際, SE-Sinc-Nyström 法の場合をみると, 最適値で定めた方が収束が速いことが観察できる. ただし, DE-Sinc-Nyström 法の場合では, 最適ではないにも拘らず, 定理 4.3 に従って定めた場合の方が収束が速い. この現象に関する考察は §4.4.3 で述べる.

今回においても, その他の値で d を設定した場合の挙動を調べる. SE-Sinc-Nyström 法の場合に,

$$h = \sqrt{\frac{2^r \pi_m \pi}{N}} \quad (4.19)$$

とし, $r = -1, 0, 1, 2, 3$ と動かした場合の数値実験結果を図 4.7 と図 4.8 に示す. $r = 1$ の場合が理論的には最適であり, 実際に数値実験でも最も収束が速いことが確認できる.

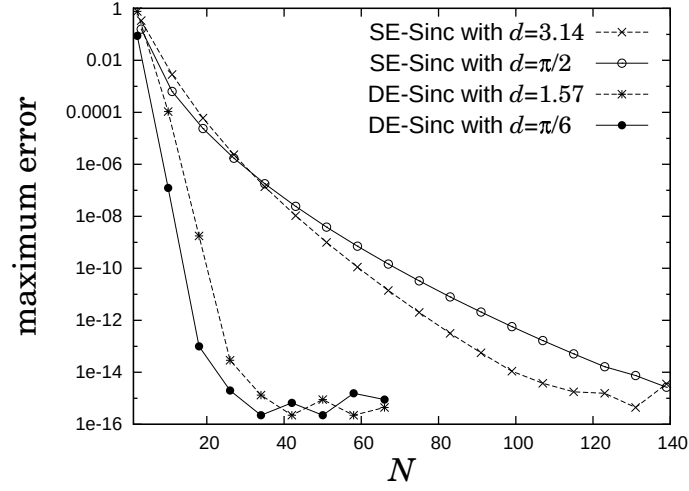


図 4.6 方程式 (4.18) に対する SE-Sinc-Nyström 法と DE-Sinc-Nyström 法の d の値を変えた計算結果: d を定理に従って定めた場合 (実線), d を最適値で定めた場合 (鎖線).

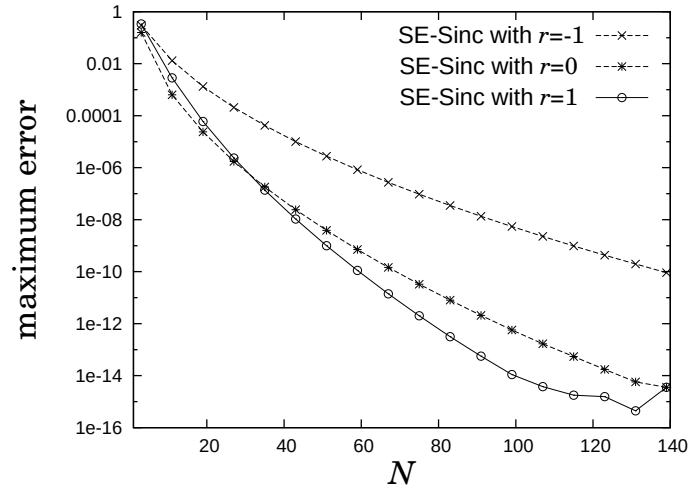


図 4.7 方程式 (4.18) に対する SE-Sinc-Nyström 法の h を式 (4.19) で定めて $r = -1, 0, 1$ と変化させた計算結果. 理論的には $r = 1$ (実線) が最適.

DE-Sinc-Nyström 法の場合は

$$h = \frac{\log(2^r \pi_m N)}{N} \quad (4.20)$$

とし, $r = -1, 0, 1, 2, 3$ と動かした場合の数値実験結果を図 4.9 と図 4.10 に示す. やはり $r = 1$ が最適のはずであるが, 図から判断すると, r が小さい方が収束が速い. これは §4.4.1 における数値実験の場合と同じ結果である. この現象に関する考察は §4.4.3 で述べる.

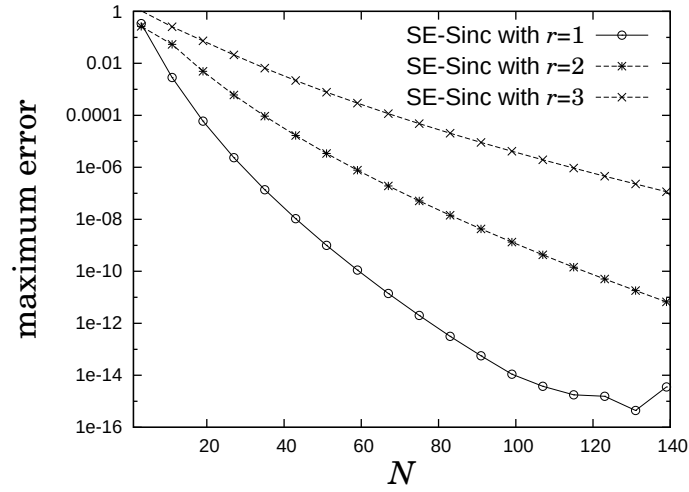


図 4.8 方程式 (4.18) に対する SE-Sinc-Nyström 法の h を式 (4.19) で定めて $r = 1, 2, 3$ と変化させた計算結果. 理論的には $r = 1$ (実線) が最適.

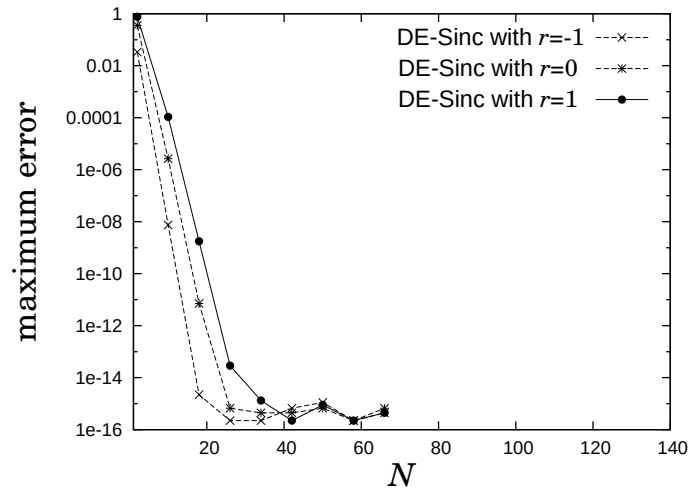


図 4.9 方程式 (4.18) に対する DE-Sinc-Nyström 法の h を式 (4.20) で定めて $r = -1, 0, 1$ と変化させた計算結果. 理論的には $r = 1$ (実線) が最適.

4.4.3 DE 変換を用いる場合のパラメータの値と収束性に関する考察

ここでは §3.4.3 と同様の考察を行う. DE-Sinc-Nyström 法が近似に用いている DE-Sinc 積分は, 離散化誤差が $O(e^{-2\pi d/h})$ で, 打ち切り誤差が $O(e^{-\frac{\pi}{2} \exp(Nh)})$ と評価される (詳しい解析は §9.4.3 を参照). よって, DE-Sinc 積分の誤差はある定数 C_D と C_T を用いて

$$|\text{DE-Sinc 積分の誤差}| \leq C_D e^{-2\pi d/h} + C_T e^{-\frac{\pi}{2} \exp(Nh)} \quad (4.21)$$

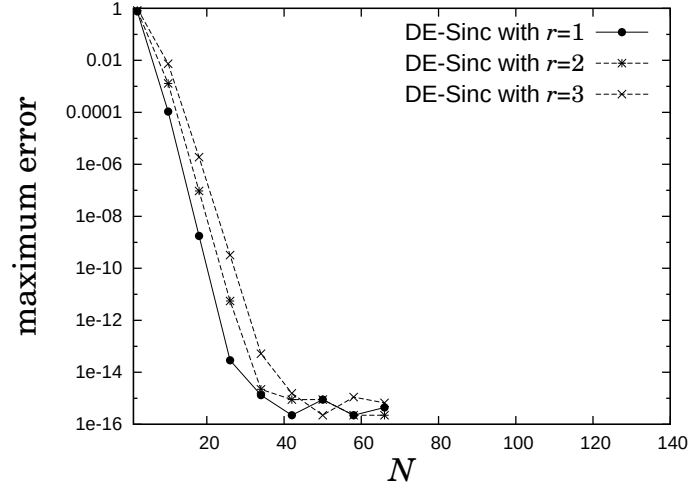


図 4.10 方程式 (4.18) に対する DE-Sinc-Nyström 法の h を式 (4.20) で定めて $r = 1, 2, 3$ と変化させた計算結果. 理論的には $r = 1$ (実線) が最適.

と評価される. ここで, h を一般に

$$h = \frac{\log(cN)}{N} \quad (4.22)$$

で定めることにして代入すると,

$$\begin{aligned} |\text{DE-Sinc 積分の誤差}| &\leq C_D e^{-2\pi d N / \log(cN)} + C_T e^{-\frac{\pi}{2} c N} \\ &= \left\{ C_D + C_T e^{-\frac{\pi}{2} N(c - 4d / \log(cN))} \right\} e^{-2\pi d N / \log(cN)} \end{aligned} \quad (4.23)$$

と評価でき, 右辺の $\{\cdot\}$ の部分は N に依存しない定数で評価できるので, 収束次数は $O(e^{-2\pi d N / \log(cN)})$ となる. この評価をみると, c は小さくとした方が DE-Sinc 積分の収束が速くなることがわかる.

ところが, c を小さくとりすぎると, 定数となる $\{\cdot\}$ の部分の値が大きくなることにも注意. 実際に図 4.4 をみると, N が小さいときの誤差は $r = 1$ の場合に比べ $r = 0, -1$ の場合の方が大きく, これは定数が大きいのことを示唆している. ただし, 図 4.9 をみると, この場合は定数が大きくなっているとはいえず, この現象の説明は今後の課題である.

4.5 証明：解 u の性質の解析

ここでは定理 4.3 の証明を行う. まず, 関数 k は任意の $z, w \in \overline{\mathfrak{D}}$ で $k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$, $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ をみたすものとし, $f \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ に対して線形作用素 $\mathcal{K} : \mathbf{HC}(\mathfrak{D}) \rightarrow \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ を

$$\mathcal{K}[f](z) = \int_a^b k(z, w) f(w) dw \quad (4.24)$$

と定義する. この $\mathcal{K}$ を用いると, 方程式 (1.2) は $(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{K})u = g$ と表せる. 作用素 $\mathcal{K}$ は, 次のように $\mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ 上でコンパクト作用素となる.

補題 4.8 (岡山ら [91, 補題 4.1]) 任意の $z, w \in \overline{\mathfrak{D}}$ に対し, $k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ かつ $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ とする. このとき, $\mathcal{K}$ は $\mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ 上のコンパクト作用素である.

証明. 作用素 $\mathcal{K}$ は $\mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ 上の有界集合を一様に有界かつ同程度連続な集合に写すので, 複素関数版に拡張された Arzelà–Ascoli の定理 (cf. Rudin [119, Theorem 11.28]) より補題の主張が成り立つ. ■

したがって, Fredholm の択一定理を用いると, 定理 4.3 が成り立つことがわかる.

4.6 証明：スキームの可解性と収束性の解析

4.6.1 SE-Sinc-Nyström 法に対して

ここでは, 定理 4.4 の証明を行う.

証明の流れ

積分 $\mathcal{K}f$ を SE-Sinc 積分で近似した式を

$$\mathcal{K}_N^{\text{SE}}[f](t) = h \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \quad (4.25)$$

とおき, 元々の方程式 (1.2) に加えて, 次の二つの方程式

$$(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{K}_N^{\text{SE}})v = g, \quad (4.26)$$

$$(\lambda I_m - K_m^{\text{SE}})c_m = g_m^{\text{SE}} \quad (4.27)$$

を考える. それぞれ, 元の方程式を近似した方程式 (4.3), 連立 1 次方程式 (4.5) と同一の方程式である. スキームの一意可解性を示すために, 定理 4.3 の仮定の下で

1. 方程式 (4.26) が一意可解であれば方程式 (4.27) は一意可解 (補題 4.9).
2. 十分大きな N では方程式 (4.26) は一意可解 (補題 4.17).

を順に示して証明する. 最後に補題 4.9 と補題 4.17 を用いて定理 4.4 を示す.

ステップ 1. 方程式 (4.26) が一意可解であれば方程式 (4.27) は一意可解

次の補題が成立する.

補題 4.9 次の二つは同値である：

- (A) 方程式 (4.26) には一意解 $v \in \mathbf{X}$ が存在する.
- (B) 方程式 (4.27) には一意解 $c_m \in \mathbb{R}^m$ が存在する.

証明. (A) $\Rightarrow$ (B) も同様に示される^{*3}ので、ここでは (B) $\Rightarrow$ (A) のみ示す．方程式 (4.27) の一意解 $\mathbf{c}_m = [c_{-N}, \dots, c_N]^\top$ を用いて関数 $v \in \mathbf{X}$ を

$$v(t) = \frac{1}{\lambda} \left\{ g(t) + h \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) c_j \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \right\} \quad (4.28)$$

とおくと、選点上 $t = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih)$ ($i = -N, \dots, N$) においては

$$\lambda v(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih)) = g(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih)) + h \sum_{j=-N}^N k(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih), \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) c_j \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \quad (4.29)$$

が成り立つ．一方 c_j は連立 1 次方程式 (4.27) の解なので

$$\lambda c_i = g(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih)) + h \sum_{j=-N}^N k(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih), \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) c_j \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \quad (4.30)$$

が成り立つ．よって $v(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih)) = c_i$ であるので、式 (4.28) は

$$v(t) = \frac{1}{\lambda} \left\{ g(t) + h \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) v(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \right\} \quad (4.31)$$

と書き換えられる．これは関数 v が方程式 (4.26) の解であることを示している．よって方程式 (4.26) には解が存在する．次に、方程式 (4.26) に異なる解 $\tilde{v} \in \mathbf{X}$ が存在したとする．このとき、この関数 $\tilde{v}$ を用いて $\tilde{\mathbf{c}}_m = [\tilde{v}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(-Nh)), \dots, \tilde{v}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(Nh))]^\top$ とおくと、 $\tilde{\mathbf{c}}_m$ は方程式 (4.27) の解である．ところで、仮定より方程式 (4.27) の解は一意であったので、 $\mathbf{c}_m = \tilde{\mathbf{c}}_m$ である．いま、 $\tilde{v}$ は

$$\tilde{v}(t) = \frac{1}{\lambda} \left\{ g(t) + h \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \tilde{c}_j \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \right\} \quad (4.32)$$

と表されるので、式 (4.28) と見比べれば、 $\mathbf{c}_m = \tilde{\mathbf{c}}_m$ は $v = \tilde{v}$ を意味することがわかる．よって補題は示された．■

ステップ 2. 十分大きな N では方程式 (4.26) は一意可解

定理 3.15 の四つの条件を ($\mathcal{X} = \mathcal{K}$, $\mathcal{X}_n = \mathcal{K}_N^{\text{SE}}$ として) 定理 4.3 の仮定の下で成り立つことを示せばよい．まず条件 1 は明らかに成り立つ．条件 2 が成り立つための条件は、次のように (古くより) 知られている．

定理 4.10 (Golberg–Chen [42, Example 4.25]) $k \in C([a, b] \times [a, b])$ とし、斉次方程式 $\mathcal{K}f = f$ の解は $f \equiv 0$ のみであるとする．このとき、作用素 $(I - \mathcal{K}) : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ は有界な逆作用素 $(I - \mathcal{K})^{-1} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ を持つ．さらに $g \in \mathbf{X}$ であれば、方程式 (1.2) には唯一解 $u \in \mathbf{X}$ が存在する．

^{*3} 例えば補題 3.14 の証明を参照のこと．ここでは (A) $\Rightarrow$ (B) を示しており、その証明と全く同様に行える．

定理 3.2 の仮定の下でこの定理の条件は明らかに成り立つ。したがって、あと示すべきは条件 3 と 4 である。これらが成り立つ作用素の性質を述べたものとして、次の「collectively compact」という概念が考えられている [6].

定義 4.11 $\mathcal{X}_n$ は $\mathbf{X}$ をそれ自身に写す線形作用素であって、さらに次の集合

$$\{\mathcal{X}_n f : n \in \mathbb{N} \text{ and } \|f\|_{\mathbf{X}} \leq 1\} \quad (4.33)$$

が $\mathbf{X}$ において相対コンパクトであるとする。このとき、集合 $\{\mathcal{X}_n : n \in \mathbb{N}\}$ は collectively compact であるという。

collectively compact は n に関して一様なコンパクト性を要求するので、 $\{\mathcal{X}_n : n \in \mathbb{N}\}$ が collectively compact であることが示されれば、明らかに各 n で $\mathcal{X}_n$ はコンパクト作用素であり、条件 3 が成り立つ。さらに、 $\mathcal{X}_n$ が $\mathcal{X}$ に $\mathbf{X}$ 上で各点収束するとき、ある (十分大きな) n 以上では条件 4 も成り立つ。これは次の補題よりわかる。

補題 4.12 (Atkinson [8, Lemma 4.1.2]) $\mathcal{X}$ と $\mathcal{X}_n$ は $\mathbf{X}$ をそれ自身に写す線形作用素とし、さらに次を仮定する：

1. 任意の $f \in \mathbf{X}$ に対し、 $\|\mathcal{X}f - \mathcal{X}_n f\|_{\mathbf{X}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.
2. 集合 $\{\mathcal{X}_n : n \in \mathbb{N}\}$ は collectively compact.

このとき、次の収束性が成り立つ：

$$\|(\mathcal{X} - \mathcal{X}_n)\mathcal{X}_n\|_{\mathbf{X}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (4.34)$$

この補題の二つの仮定が成り立つことを示せばよい。ここで、一般に式 (2.38) の $\mathcal{Q} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ を近似する積分公式 $\mathcal{Q}_n : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$\mathcal{Q}f \approx \mathcal{Q}_n f = \sum_{j=1}^{q_n} w_j f(s_j) \quad (4.35)$$

と与えられたとき、この近似法に基づいて $\mathcal{K} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ を近似する $\mathcal{K}_n : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ を

$$\mathcal{K}[f](t) \approx \mathcal{K}_n[f](t) = \sum_{j=1}^{q_n} w_j k(t, s_j) f(s_j) \quad (4.36)$$

と定義すると、補題 4.12 の二つの仮定が成り立つ条件は次のように与えられている。

命題 4.13 (Anselone [6, Proposition 2.1 and 2.2]) 任意の $f \in \mathbf{X}$ に対し、積分公式 (4.35) が $n \rightarrow \infty$ で収束するとする。さらに $k \in C([a, b] \times [a, b])$ とすると、近似式 (4.36) の $\mathcal{K}_n$ に対し、次が成り立つ：

1. 任意の $f \in \mathbf{X}$ に対し、 $\|\mathcal{K}f - \mathcal{K}_n f\|_{\mathbf{X}} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$.
2. 集合 $\{\mathcal{K}_n : n \in \mathbb{N}\}$ は collectively compact.

$\mathcal{Q}_N^{\text{SE}}$ と $\mathcal{K}_N^{\text{SE}}$ は式 (4.35) の $\mathcal{Q}_n$ と式 (4.36) の $\mathcal{K}_n$ の特別な場合であるので、今回の設定でもこの命題は有用である。命題 4.13 の仮定 ($N \rightarrow \infty$ で $\mathcal{Q}_N^{\text{SE}} f \rightarrow \mathcal{Q}f$) を示すには、次の事実が有用である。

定理 4.14 (Banach–Steinhaus theorem (cf. Conway [26, p. 95])) $\mathbf{Y}$ と $\mathbf{Z}$ を Banach 空間とし、 $\mathcal{W}, \mathcal{W}_n (n = 1, 2, \dots) : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Z}$ は有界線形作用素とする。さらに、 $\mathbf{E}$ は $\mathbf{Y}$ の稠密な部分空間とする。このとき、任意の $f \in \mathbf{Y}$ に対し $\mathcal{W}_n f \rightarrow \mathcal{W}f (n \rightarrow \infty)$ となる必要十分条件は、次の二つが成り立つことである：

1. 任意の $f \in \mathbf{E}$ に対し $\mathcal{W}_n f \rightarrow \mathcal{W}f (n \rightarrow \infty)$.
2. $\sup_n \|\mathcal{W}_n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Z})} < \infty$.

今回では $\mathbf{Y} = C([a, b])$, $\mathbf{Z} = \mathbb{R}$, $\mathcal{W} = \mathcal{Q}$, $\mathcal{W}_n = \mathcal{Q}_N^{\text{SE}}$ にあたる。多項式全体は $C([a, b])$ で稠密であるので、今回の場合 $\mathbf{E}$ を多項式全体と考えればよく、次の補題が成り立つ。

補題 4.15 (岡山ら [100, 補題 7.1]) $\mathbf{E}$ を多項式全体とすると、式 (2.39) の $\mathcal{Q}_N^{\text{SE}}$ に対し、次の二つが成り立つ：

1. 任意の $f \in \mathbf{E}$ に対し $\mathcal{Q}_N^{\text{SE}} f \rightarrow \mathcal{Q}f (N \rightarrow \infty)$.
2. $\sup_N \|\mathcal{Q}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbb{R})} < \infty$.

証明. 多項式の正則性より、1 番目については明らか (cf. Stenger [135, Corollary 4.2.7]). また 2 番目についても、任意の $f \in \mathbf{X}$ に対し

$$\frac{|\mathcal{Q}_N^{\text{SE}} f|}{\|f\|_{\mathbf{X}}} \leq h \sum_{j=-N}^N \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \quad (4.37)$$

であり、この右辺は $\int_{-\infty}^{\infty} \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(t) dt$ に収束するので、 N に対し一様に有界である。 ■

よって、命題 4.13 の仮定が次のように成り立つ。

補題 4.16 (Okayama et al. [96, Lemma 6.8]) 任意の $f \in \mathbf{X}$ に対し $N \rightarrow \infty$ で $\mathcal{Q}_N^{\text{SE}} f \rightarrow \mathcal{Q}f$ が成り立つ。

以上をまとめると、次の補題が成り立つ。

補題 4.17 定理 4.3 の仮定が $\mathcal{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする。このとき、ある N_0 が存在して、任意の $N \geq N_0$ に対し方程式 (4.26) には一意解 $v \in \mathbf{X}$ が存在する。さらに N に依存しない定数 C が存在して、誤差は次のように評価できる：

$$\|u - v\|_{\mathbf{X}} \leq C \|\mathcal{K}u - \mathcal{K}_N^{\text{SE}} u\|_{\mathbf{X}}. \quad (4.38)$$

証明. 定理 3.15 の条件はみたされているので、あと $\|(\mathcal{I} - \mathcal{K}_N^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ が一様有界であることだけ示せばよい。そのためには、式 (3.55) より、 $\|\mathcal{K}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ と $\|(\mathcal{K} - \mathcal{K}_N^{\text{SE}})\mathcal{V}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$

を調べればよい. まず $\tilde{M}_k = \max_{t,s \in [a,b]} |k(t,s)|$ とおくと,

$$\|\mathcal{K}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \leq \tilde{M}_k \|\mathcal{Q}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbb{R})} \quad (4.39)$$

と評価できる. 補題 4.15 の主張 2 より, $\|\mathcal{Q}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbb{R})}$ は一様有界であるので, $\|\mathcal{K}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ も一様有界である. さらに $\|(\mathcal{K} - \mathcal{K}_N^{\text{SE}})\mathcal{V}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \rightarrow 0$ を考慮すれば, $\|(\mathcal{I} - \mathcal{K}_N^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ はある N_0 以上で一様有界であることがわかる. ■

最終ステップ. 定理 4.4 の証明

補題 4.9 と補題 4.17 の結果を用いて, 定理 4.4 は次のように示すことができる.

証明. 補題 4.17 において, あと $\|\mathcal{K}u - \mathcal{K}_N^{\text{SE}}u\|_{\mathbf{X}}$ を評価すればよい. 定理 4.3 より, $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ であるので, $uQ \in \mathbf{L}_1(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ となる. よって定理 2.19 より, ある定数 $\tilde{C}$ が存在して

$$\|\mathcal{K}u - \mathcal{K}_N^{\text{SE}}u\|_{\mathbf{X}} \leq \tilde{C} e^{-\sqrt{2\pi d}N} \quad (4.40)$$

と評価できる. 以上で定理は証明された. ■

4.6.2 DE-Sinc-Nyström 法に対して

ここでは, 定理 4.5 の証明を行う.

証明の流れ

証明の流れはほとんど SE-Sinc-Nyström 法の場合と同様である. 積分 $\mathcal{K}f$ を DE-Sinc 積分で近似した式を

$$\mathcal{K}_N^{\text{DE}}[f](t) = h \sum_{j=-N}^N k(t, \psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh)) f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) \quad (4.41)$$

とおき, 元々の方程式 (1.2) に加えて, 次の二つの方程式

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{K}_N^{\text{DE}})v = g, \quad (4.42)$$

$$(\lambda I_m - K_m^{\text{DE}})\mathbf{c}_m = \mathbf{g}_m^{\text{DE}} \quad (4.43)$$

を考える. それぞれ, 元の方程式を近似した方程式 (4.9), 連立 1 次方程式 (4.11) と同一の方程式である. スキームの一意可解性を示すために, 定理 4.3 の仮定の下で

1. 方程式 (4.42) が一意可解であれば方程式 (4.43) は一意可解 (補題 4.18).
2. 十分大きな N では方程式 (4.42) は一意可解 (補題 4.21).

を順に示して証明する. 最後に補題 4.18 と補題 4.21 を用いて定理 4.5 を示す.

ステップ 1. 方程式 (4.42) が一意可解であれば方程式 (4.43) は一意可解

次の補題が成立する．証明は，補題 3.22 の証明において，SE 変換を DE 変換に置き換えればよい．

補題 4.18 次の二つは同値である：

- (A) 方程式 (4.42) には一意解 $v \in \mathbf{X}$ が存在する．
- (B) 方程式 (4.43) には一意解 $\mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^m$ が存在する．

ステップ 2. 十分大きな N では方程式 (4.42) は一意可解

定理 3.15 の四つの条件を ($\mathcal{X} = \mathcal{K}$, $\mathcal{X}_n = \mathcal{K}_N^{\text{DE}}$ として) 定理 4.3 の仮定の下で成り立つことを示す．SE 変換の場合と同様，条件 3 と 4 を示すために，命題 4.13 の仮定 ($N \rightarrow \infty$ で $\mathcal{Q}_N^{\text{DE}} f \rightarrow \mathcal{Q}f$) を示す必要があるが，実際に次の補題が成り立つ．証明は補題 4.15 と同様に行える．

補題 4.19 (岡山ら [100, 補題 9.1]) $\mathbf{E}$ を多項式全体とすると，式 (2.45) の $\mathcal{Q}_N^{\text{DE}}$ に対し，次の二つが成り立つ：

- 1. 任意の $f \in \mathbf{E}$ に対し $\mathcal{Q}_N^{\text{DE}} f \rightarrow \mathcal{Q}f$ ($N \rightarrow \infty$).
- 2. $\sup_N \|\mathcal{Q}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbb{R})} < \infty$.

よって，命題 4.13 の仮定が次のように成り立つ．

補題 4.20 (Okayama et al. [96, Lemma 8.4]) 任意の $f \in \mathbf{X}$ に対し $N \rightarrow \infty$ で $\mathcal{Q}_N^{\text{DE}} f \rightarrow \mathcal{Q}f$ が成り立つ．

以上をまとめると，次の補題が成り立つ．

補題 4.21 定理 4.3 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする．このとき，ある N_0 が存在して，任意の $N \geq N_0$ に対し方程式 (4.42) には一意解 $v \in \mathbf{X}$ が存在する．さらに N に依存しない定数 C が存在して，誤差は次のように評価できる：

$$\|u - v\|_{\mathbf{X}} \leq C \|\mathcal{K}u - \mathcal{K}_N^{\text{DE}}u\|_{\mathbf{X}}. \quad (4.44)$$

証明. 定理 3.15 の条件はみたされているので，あと $\|(\mathcal{I} - \mathcal{K}_N^{\text{DE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ が一様有界であることだけ示せばよい．そのためには，式 (3.55) より， $\|\mathcal{K}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ と $\|(\mathcal{K} - \mathcal{K}_N^{\text{DE}})\mathcal{V}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ を調べればよい．まず $\tilde{M}_k = \max_{t,s \in [a,b]} |k(t,s)|$ とおくと，

$$\|\mathcal{K}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \leq \tilde{M}_k \|\mathcal{Q}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbb{R})} \quad (4.45)$$

と評価できる．補題 4.19 の主張 2 より， $\|\mathcal{Q}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbb{R})}$ は一様有界であるので， $\|\mathcal{K}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$

も一様有界である. さらに $\|(\mathcal{K} - \mathcal{K}_N^{\text{DE}})\mathcal{V}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \rightarrow 0$ を考慮すれば, $\|(\mathcal{I} - \mathcal{K}_N^{\text{DE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ はある N_0 以上で一様有界であることがわかる. ■

最終ステップ. 定理 4.5 の証明

補題 4.18 と補題 4.21 の結果を用いて, 定理 4.5 は次のように示すことができる.

証明. 補題 4.21 において, あと $\|\mathcal{K}u - \mathcal{K}_N^{\text{DE}}u\|_{\mathbf{X}}$ を評価すればよい. 定理 4.3 より, $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ であるので, $uQ \in \mathbf{L}_1(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ となる. よって定理 2.23 より, ある定数 $\tilde{C}$ が存在して

$$\|\mathcal{K}u - \mathcal{K}_N^{\text{DE}}u\|_{\mathbf{X}} \leq \tilde{C} e^{-2\pi dN / \log(4dN)} \quad (4.46)$$

と評価できる. 以上で定理は証明された. ■

第 5 章

Volterra 積分方程式に対する Sinc 選点法

本章では，Volterra 積分方程式 (1.1) に対して Rashidinia–Zarebnia [114] によって提案された Sinc 選点法の改良とその理論解析を行う（前章までの Sinc–Nyström 法の場合とは異なり，今後は理論解析だけでなく，スキームの改善も行う）．まず第 5.1 節で彼らの結果をまとめた後，第 5.2 節で議論すべき点と，改善のアイデアについて述べる．第 5.3 節で具体的に改善したスキームや，理論解析の結果を述べる．第 5.4 節では，本論文の結果が確認できる数値実験結果を示す．第 5.5 節と第 5.6 節は証明である．

5.1 Rashidinia–Zarebnia による SE-Sinc 選点法

ここでは Rashidinia–Zarebnia [114] により導出された，SE 変換を用いた Sinc 選点法（SE-Sinc 選点法）を説明する．方程式 (1.1) の解 u を $u \in \mathbf{L}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ と仮定する．さらに u の端点の値で以下のように四通りに場合分けし，それに応じて，展開係数 $u_{-N-1}, u_{-N}, \dots, u_N, u_{N+1}$ を用いて近似解 u_N^{RZ} を構成する．

場合 1 $u(a) = u(b) = 0$ のとき：

$$u(t) \approx u_N^{\text{RZ}}(t) = \sum_{j=-N-1}^{N+1} u_j S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)). \quad (5.1)$$

場合 2 $u(a) \neq 0, u(b) = 0$ のとき：

$$u(t) \approx u_N^{\text{RZ}}(t) = u_{-N-1} \omega_a(t) + \sum_{j=-N}^{N+1} u_j S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)). \quad (5.2)$$

場合 3 $u(a) = 0, u(b) \neq 0$ のとき：

$$u(t) \approx u_N^{\text{RZ}}(t) = \sum_{j=-N-1}^N u_j S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) + u_{N+1} \omega_b(t). \quad (5.3)$$

場合 4 $u(a) \neq 0, u(b) \neq 0$ のとき :

$$u(t) \approx u_N^{\text{RZ}}(t) = u_{-N-1}\omega_a(t) + \sum_{j=-N}^N u_j S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) + u_{N+1}\omega_b(t). \quad (5.4)$$

ただし, 上記において ω_a と ω_b はそれぞれ式 (2.74) で定められた関数である.

注意 5.1 仮定 $u \in \mathbf{L}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ の条件式 (2.50) と場合 2~4 の条件は矛盾するが, ともかく原論文 [114] ではそのように記述されている.

次に, 上の近似解に基づいてスキームを構成する. ここでは簡単のために, 先に記した 4 通りのうち場合 1 に限って説明する. 場合 2~4 も同様に扱われる. 方程式 (1.1) の解 u が場合 1 の条件をみたすとし, 式 (5.1) のように近似解 u_N^{RZ} を設定する. 本節を通じて, 刻み幅 h は式 (2.53) に基づいて

$$h = \sqrt{\frac{\pi d}{\mu N}} \quad (5.5)$$

で定める. 上記の u_N^{RZ} を方程式 (1.1) に代入し, $m = 2N + 3$ 個の選点を

$$t_i^{\text{RZ}} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih), \quad i = -N - 1, -N, \dots, N, N + 1 \quad (5.6)$$

と定め, 方程式を離散化する. ただし積分は定理 2.26 に基づき

$$\begin{aligned} \int_a^{t_i^{\text{RZ}}} k(t_i^{\text{RZ}}, s) u_N^{\text{RZ}}(s) ds &\approx \sum_{j=-N}^N k(t_i^{\text{RZ}}, t_j^{\text{RZ}}) u_N^{\text{RZ}}(t_j^{\text{RZ}}) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) J(j, h)(ih) \\ &= h \sum_{j=-N}^N k(t_i^{\text{RZ}}, t_j^{\text{RZ}}) u_N^{\text{RZ}}(t_j^{\text{RZ}}) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \delta_{ij}^{(-1)} \end{aligned} \quad (5.7)$$

と近似する. ここで $\delta_{ij}^{(-1)}$ は式 (3.4) で定められる数である. さらに, $\delta_{ij}^{(0)}$ は Kronecker のデルタとし, また $m \times m$ 行列 V_m^{RZ} と m 次元ベクトル $\mathbf{g}_m^{\text{RZ}}$ を

$$(V_m^{\text{RZ}})_{ij} = h k(t_i^{\text{RZ}}, t_j^{\text{RZ}}) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \delta_{ij}^{(-1)}, \quad i, j = -N - 1, -N, \dots, N, N + 1, \quad (5.8)$$

$$\mathbf{g}_m^{\text{RZ}} = [g(t_{-N-1}^{\text{RZ}}), \dots, g(t_{N+1}^{\text{RZ}})]^\top \quad (5.9)$$

で定めた上で, $u_N^{\text{RZ}}(t_j^{\text{RZ}}) = u_j$ の関係に注意して変形すると, 離散化された方程式は, 展開係数 $\mathbf{u}_m = [u_{-N-1}, \dots, u_{N+1}]^\top$ に関する連立 1 次方程式

$$(\lambda I_m - V_m^{\text{RZ}}) \mathbf{u}_m = \mathbf{g}_m^{\text{RZ}} \quad (5.10)$$

となる. この方程式を解いて $\mathbf{u}_m$ を求めれば, 式 (5.1) で近似解 u_N^{RZ} が定まる. これが Rashidinia-Zarebnia による SE-Sinc 選点法である. 以後, 簡便のために RZ スキームと呼ぶ.

注意 5.2 第 3 章における SE-Sinc-Nyström 法と, 本章における SE-Sinc 選点法では, 近似解 u_N^{SE} の設定法が異なる. SE-Sinc-Nyström 法では, 近似解は式 (3.9) のように関数 $g, k, J(j, h)$

を用いて展開されているが、SE-Sinc 選点法は基底関数は $\omega_a, \omega_b, S(j, h)$ を用いて展開した形で設定している。この違いは、以降で述べる DE 変換を用いた場合にも言えることである。

この RZ スキームに対し、Rashidinia–Zarebnia [114] は次のような誤差解析を与えた。

定理 5.3 (Rashidinia–Zarebnia [114, Theorem 3]) 方程式 (1.1) の解 u は $u \in \mathbf{L}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ かつ $u(a) = u(b) = 0$ をみたし、また任意の $t \in [a, b]$ に対し、関数 k は $k(t, \cdot)Q(\cdot) \in \mathbf{L}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ をみたすとする。このとき、連立 1 次方程式 (5.10) を解いて式 (5.1) で u_N^{RZ} を定めると、 N に依存しないある定数 C によって、誤差は次のように評価される：

$$\|u - u_N^{\text{RZ}}\|_{\mathbf{X}} \leq C \|(\lambda I_m - V_m^{\text{RZ}})^{-1}\|_2 \sqrt{N} e^{-\sqrt{\pi d \mu} N}. \quad (5.11)$$

5.2 Rashidinia–Zarebnia の結果に関する議論と改良のアイディア

上述した Rashidinia–Zarebnia による結果には、実装上、および理論解析の観点から、改良の余地がある。本節ではそれらをまとめた上、次節で与える改良方法のアイディアを示す。

5.2.1 RZ スキームの修正について

RZ スキームでは、解 u の端点の値によって 4 通りに場合分けして近似解 u_N^{RZ} を設定するが、解 u は未知関数であるため、この条件の確認は困難である。また、そもそも仮定 $u \in \mathbf{L}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ と場合 2~4 の条件が矛盾することは、注意 5.1 で述べた通りである。

そこで、解 u の端点の値によって近似式を変更する必要のない、一般化 SE-Sinc 関数近似 (2.77) に基づく解の近似：

$$u(t) \approx u_N^{\text{SE}}(t) = u_{-N-1}\omega_a(t) + \sum_{j=-N}^N u_j S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) + u_{N+1}\omega_b(t) \quad (5.12)$$

を考え^{*1}、一般化 SE-Sinc 関数近似が高精度となる条件 $u \in \mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ を想定して、スキームの設計および理論を展開する。

加えて、Rashidinia–Zarebnia の定めた選点 (5.6) を、

$$t_i^{\text{SE}} = \begin{cases} a & (i = -N - 1) \\ \psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih) & (i = -N, \dots, N) \\ b & (i = N + 1) \end{cases} \quad (5.13)$$

と取り直す。違いは $i = -N - 1$ と $i = N + 1$ にある。一般化 SE-Sinc 関数近似 (2.77) は、選点が式 (5.6) の場合、 $i = -N, \dots, N$ では $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}[f](t_i^{\text{RZ}}) = f(t_i^{\text{RZ}})$ と補間の性質が成り立つ

^{*1} この近似式は形は (5.4) の近似式に他ならないが、解 u の端点の値によって近似式を変更する必要のない近似式として意味が異なるので、敢えて新しく定義しておく。

が, $i = -N - 1, N + 1$ では一般に $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}[f](t_i^{\text{RZ}}) \neq f(t_i^{\text{RZ}})$ である. それに対し式 (5.13) の場合, 全ての $i = -N - 1, \dots, N + 1$ で $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}[f](t_i^{\text{RZ}}) = f(t_i^{\text{RZ}})$ と補間の性質が成り立つ. この性質が理論誤差解析において有効に用いられる (補題 5.10 や 5.14 を参照).

RZ スキームに対して以上の改良を加えたものを, 以後「修正 Rashidinia–Zarebnia スキーム」と呼び, §5.3.2 で詳述する.

5.2.2 積分方程式の解が属する関数空間について (論点 1 に関連)

RZ スキームでは, 積分方程式 (1.1) の解, すなわち, 未知関数 u が関数空間 $\mathbf{L}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ に属すると仮定し, その μ と d の値を用いて, 刻み幅 h を式 (5.5) で定めている. しかしながら, u はこれから求めようとする関数であるので, 事前に u を調べて μ と d の値を知ることができる, という想定は現実的ではない. そのため, 正当に実装することは事実上不可能であった. そこで本論文では, 方程式の解 u が $\mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ (後に出てくる DE-Sinc スキームでは $\mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$) に属する条件を, 方程式に含まれる既知関数 $k(t, s)$, $g(t)$ に関する条件として与える. このことを §5.3.1 で示す.

5.2.3 収束定理について (論点 2 に関連)

誤差解析がなされているのは, 場合 1 に分類される場合 (つまり, たまたま $u(a) = u(b) = 0$ の場合) という非常に限られた範囲のみである (定理 5.3). さらに言えば, この誤差解析には以下の議論すべき点がある.

まず, この定理では暗黙のうちに $(\lambda I_m - V_m^{\text{RZ}})^{-1}$ の存在が仮定されているが, これはスキームの可解性として別途証明が必要な事柄である. さらに, 仮に $(\lambda I_m - V_m^{\text{RZ}})^{-1}$ が存在したとして, 誤差評価式に含まれている $\|(\lambda I_m - V_m^{\text{RZ}})^{-1}\|_2$ の N への依存性を明らかにしなければ, 厳密な意味で収束性を示したことはない. 彼らは数値実験において $\|(\lambda I_m - V_m^{\text{RZ}})^{-1}\|_2$ を観察し, N に対し急激には増大しないことから, 全体として $O(\exp(-c_1 \sqrt{N}))$ で収束すると主張しているが, これはあくまでも数値実験に基づく主張にすぎない.

本論文では, これらを解決した上で, $u(a)$ や $u(b)$ が 0 とは限らない一般の場合の誤差解析の定理を §5.3.2 で示す. なお, そこにおいて, 式 (5.13) のようにサンプリング点を補間点の上に取り直したことが重要であることを再度注意しておく.

5.2.4 新規に提案する DE-Sinc スキームについて

また, 以上は全て SE 変換を用いた Sinc 選点法についてであったが, さらに本論文ではこの結果を DE 変換を用いた Sinc 選点法 (DE-Sinc スキーム) の場合に拡張する. スキームの違いは変数変換にあるが, DE 変換を用いる場合には, 誤差は $O(\exp(-c_2 N / \log N))$ となり, SE 変換を用いた場合よりも格段に収束が速くなる. この結果を §5.3.3 で示す.

5.3 主結果：Sinc 選点法の改良とその理論解析

5.3.1 解 u の性質の解析

本論文では，方程式 (1.1) の解 u が，一般化 Sinc 関数近似に適した空間 $\mathbf{M}_\mu(\mathfrak{D})$ に属する条件について，次のような結果を得た．証明は第 5.5 節で与える．

定理 5.4 (岡山ら [91, 定理 4.7]) 任意の $z, w \in \overline{\mathfrak{D}}$ に対し， $k(\cdot, w) \in \mathbf{M}_\mu(\mathfrak{D})$ かつ $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ とし，また $g \in \mathbf{M}_\mu(\mathfrak{D})$ とする．このとき，方程式 (1.1) には唯一解 $u \in \mathbf{M}_\mu(\mathfrak{D})$ が存在する．

SE 変換を用いる場合は， $g, k(\cdot, w) \in \mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ かつ $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ ならば $u \in \mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ となることがこの定理で保証されるので，この d, μ を式 (5.5) で用いればよい．同じく DE 変換を用いる場合も，関数 g と k の d と μ を調べれば，これらを式 (5.22) で用いることができる．このように，定理 5.4 を用いることで，関数 u が不明な場合でも刻み幅 h の決定式で用いるパラメータ d, μ を定められる．ただし，注意 3.3 で述べた内容と同じことが今回も言えることを注意しておく．

5.3.2 修正 Rashidinia–Zarebnia スキームの導出とその誤差解析

ここでは，§5.2.1 で言及した修正 Rashidinia–Zarebnia スキームの具体形を示し，その誤差解析結果を述べる．繰り返しになるが，主な修正点は近似解の設定（場合分けは行わない），および選点の取り方であることを注意しておく．

解 u は $u \in \mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ であるとし，近似解 u_N^{SE} を式 (5.12) のようにおく．刻み幅 h は式 (5.5) で定める． u_N^{SE} を方程式 (1.1) に代入した上で，選点 $t = t_i^{\text{SE}}$ 上で方程式を離散化する．ただし方程式中の積分作用素 $\mathcal{V}$ は，定理 2.26 に基づいて，式 (3.47) の作用素 $\mathcal{V}_N^{\text{SE}}$ で近似する．ただし刻み幅 h はやはり式 (5.5) で定める．ここで式 (3.4) を修正した

$$\tilde{\delta}_{ij}^{(-1)} = \begin{cases} 0 & (i = -N - 1) \\ \delta_{ij}^{(-1)} & (i = -N, \dots, N) \\ 1 & (i = N + 1) \end{cases} \quad (5.14)$$

を用いると，選点 $t = t_i^{\text{SE}}$ 上で $\mathcal{V}_N^{\text{SE}} f$ は

$$\mathcal{V}_N^{\text{SE}}[f](t_i^{\text{SE}}) = h \sum_{j=-N}^N \tilde{\delta}_{ij}^{(-1)} k(t_i^{\text{SE}}, t_j^{\text{SE}}) f(t_j^{\text{SE}}) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \quad (5.15)$$

と表される. よって, $m \times m$ 行列 E_m^{SE} と $\tilde{V}_m^{\text{SE}}$ を

$$E_m^{\text{SE}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \omega_a(t_{-N}^{\text{SE}}) & 1 & & 0 & \omega_b(t_{-N}^{\text{SE}}) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \omega_a(t_N^{\text{SE}}) & 0 & & 1 & \omega_b(t_N^{\text{SE}}) \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (5.16)$$

$$\tilde{V}_m^{\text{SE}} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \mathcal{V}_N^{\text{SE}}[\omega_a](t_{-N}^{\text{SE}}) & \cdots & h\tilde{\delta}_{-Nj}^{(-1)}k(t_{-N}^{\text{SE}}, t_j^{\text{SE}})\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) & \cdots & \mathcal{V}_N^{\text{SE}}[\omega_b](t_{-N}^{\text{SE}}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{V}_N^{\text{SE}}[\omega_a](t_N^{\text{SE}}) & \cdots & h\tilde{\delta}_{Nj}^{(-1)}k(t_N^{\text{SE}}, t_j^{\text{SE}})\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) & \cdots & \mathcal{V}_N^{\text{SE}}[\omega_b](t_N^{\text{SE}}) \\ \mathcal{V}_N^{\text{SE}}[\omega_a](b) & \cdots & hk(b, t_j^{\text{SE}})\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) & \cdots & \mathcal{V}_N^{\text{SE}}[\omega_b](b) \end{array} \right] \quad (5.17)$$

と定め, m 次元ベクトル $\tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{SE}}$ を

$$\tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{SE}} = [g(a), g(t_{-N}^{\text{SE}}), \dots, g(t_N^{\text{SE}}), g(b)]^\top \quad (5.18)$$

とおくと, 離散化された方程式は次のようになる:

$$(\lambda E_m^{\text{SE}} - \tilde{V}_m^{\text{SE}})\mathbf{u}_m = \tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{SE}}. \quad (5.19)$$

この連立1次方程式を解いて $\mathbf{u}_m$ を求めれば, 式 (5.12) によって近似解 u_N^{SE} が定まる.

本論文ではここに示した修正 RZ スキームに対し, 次の誤差解析結果を得た. 証明は §5.6.1 で与える.

定理 5.5 (岡山ら [91, 定理 7.9]) 定理 5.4 の仮定が $\mathcal{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする. このときある自然数 N_0 が存在して, $N \geq N_0$ をみたす任意の自然数 N に対し, 連立1次方程式 (5.19) は一意可解で, 近似誤差は N によらないある定数 C によって, 次のように評価できる:

$$\|u - u_N^{\text{SE}}\|_{\mathbf{X}} \leq C\sqrt{N}e^{-\sqrt{\pi d\mu N}}. \quad (5.20)$$

5.3.3 DE-Sinc スキームの導出とその誤差解析

次に, 上述した修正 RZ スキームの収束次数をさらに改善する, DE 変換を用いた Sinc 選点法 (DE-Sinc スキーム) を導出し, その誤差解析結果を述べる.

解 u は $u \in \mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ であるとし, 近似解 u_N^{DE} を

$$u_N^{\text{DE}}(t) = u_{-N-1}\omega_a(t) + \sum_{j=-N}^N u_j S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) + u_{N+1}\omega_b(t) \quad (5.21)$$

のようにおく. 刻み幅 h は式 (2.58) に基づいて

$$h = \frac{\log(2dN/\mu)}{N} \quad (5.22)$$

で定める． u_N^{DE} を方程式 (1.1) に代入した上で，次で定める選点：

$$t_i^{\text{DE}} = \begin{cases} a & (i = -N - 1) \\ \psi_{a,b}^{\text{DE}}(ih) & (i = -N, \dots, N) \\ b & (i = N + 1) \end{cases} \quad (5.23)$$

の上で離散化して，連立 1 次方程式を立てる．ただし方程式中の積分作用素 $\mathcal{V}$ は，定理 2.27 に基づいて，式 (3.76) の作用素 $\mathcal{V}_N^{\text{DE}}$ で近似する．ただし刻み幅 h はやはり式 (5.22) で定める．選点 $t = t_i^{\text{DE}}$ 上で $\mathcal{V}_N^{\text{DE}} f$ は

$$\mathcal{V}_N^{\text{DE}}[f](t_i^{\text{DE}}) = h \sum_{j=-N}^N \tilde{\delta}_{ij}^{(-1)} k(t_i^{\text{DE}}, t_j^{\text{DE}}) f(t_j^{\text{DE}}) \{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) \quad (5.24)$$

と表される．よって， $m \times m$ 行列 E_m^{DE} と $\tilde{V}_m^{\text{DE}}$ を

$$E_m^{\text{DE}} = \left[\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \hline \omega_a(t_{-N}^{\text{DE}}) & 1 & & 0 & \omega_b(t_{-N}^{\text{DE}}) \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \omega_a(t_N^{\text{DE}}) & 0 & & 1 & \omega_b(t_N^{\text{DE}}) \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (5.25)$$

$$\tilde{V}_m^{\text{DE}} = \left[\begin{array}{c|cc|cc|c} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \mathcal{V}_N^{\text{DE}}[\omega_a](t_{-N}^{\text{DE}}) & \cdots & h\tilde{\delta}_{-Nj}^{(-1)} k(t_{-N}^{\text{DE}}, t_j^{\text{DE}}) \{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) & \cdots & \mathcal{V}_N^{\text{DE}}[\omega_b](t_{-N}^{\text{DE}}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{V}_N^{\text{DE}}[\omega_a](t_N^{\text{DE}}) & \cdots & h\tilde{\delta}_{Nj}^{(-1)} k(t_N^{\text{DE}}, t_j^{\text{DE}}) \{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) & \cdots & \mathcal{V}_N^{\text{DE}}[\omega_b](t_N^{\text{DE}}) \\ \hline \mathcal{V}_N^{\text{DE}}[\omega_a](b) & \cdots & h k(b, t_j^{\text{DE}}) \{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) & \cdots & \mathcal{V}_N^{\text{DE}}[\omega_b](b) \end{array} \right] \quad (5.26)$$

と定め， m 次元ベクトル $\tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{DE}}$ を

$$\tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{DE}} = [g(a), g(t_{-N}^{\text{DE}}), \dots, g(t_N^{\text{DE}}), g(b)]^\top \quad (5.27)$$

とおくと，離散化された方程式は次のようになる：

$$(\lambda E_m^{\text{DE}} - \tilde{V}_m^{\text{DE}}) \mathbf{u}_m = \tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{DE}}. \quad (5.28)$$

この連立 1 次方程式を解いて $\mathbf{u}_m$ を求めれば，式 (5.21) によって近似解 u_N^{DE} が定まる．

本論文ではここに示した DE-Sinc スキームに対し，次の誤差解析結果を得た．証明は §5.6.2 で与える．

定理 5.6 (岡山ら [91, 定理 9.6]) 定理 5.4 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする．このときある自然数 N_0 が存在して， $N \geq N_0$ をみたす任意の自然数 N に対し，連立 1 次方程式 (5.28) は一意可解で，近似誤差は N によらないある定数 C によって，次のように評価できる：

$$\|u - u_N^{\text{DE}}\|_{\mathbf{X}} \leq C e^{-\pi d N / \log(2dN/\mu)}. \quad (5.29)$$

5.4 数値実験

本節では数値実験結果を示す。実験の目的は、RZ スキームと、本論文で導出した修正 RZ スキーム・DE-Sinc スキームとの性能比較を行うこと、そして収束速度の確認である。実装言語は C++ で、浮動小数点数には double 型を用いた。連立 1 次方程式を解くにあたっては LU 分解を用いた。また、区間は全て $[a, b] = [0, 1]$ である。

5.4.1 特異性をもたない方程式の場合

はじめに、Rashidinia–Zarebnia [114] がとりあげた次の方程式を考える。

例 5.7 (Rashidinia–Zarebnia [114, Example 4]) 次の第二種 Volterra 積分方程式

$$u(t) - \int_0^t t s u(s) ds = e^{-t^2} + \frac{t}{2}(1 - e^{-t^2}), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (5.30)$$

の解は $u(t) = e^{-t^2}$ である。

π より少し小さい数として $\pi_m = 3.14$ とおくと、定理 5.4 を用いれば、既知関数 g, k を調べることで $u \in \mathbf{M}_1(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi_m}))$ かつ $u \in \mathbf{M}_1(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi_m/2}))$ であることがわかる。そこで修正 RZ スキームでは $\mu = 1, d = \pi_m$ として刻み幅 h を式 (5.5) で定め、DE-Sinc スキームでは $\mu = 1, d = \pi_m/2$ として刻み幅 h を式 (5.22) で定めた。それに対し Rashidinia–Zarebnia [114] は、 $\mu = 1/2, d = \pi/2$ として刻み幅 h を式 (5.5) で定めており、これは π と π_m の違いを除けば修正 RZ スキームと同じ刻み幅となる。そのため、修正 RZ スキームと RZ スキームは実質的にほとんど同じであるが、RZ スキームは解析解が不明の場合は実装が困難であることを再度注意しておく（この例では解析解がわかっている）。これらの結果を図 5.1 に示す。ただし図中の最大誤差 (maximum error) は、区間 $[0, 1]$ を等分割した 101 点上での絶対誤差のうち、最も大きな値である。図 5.1 より、修正 RZ スキームは元々の RZ スキームと同じ結果を示しており、また DE-Sinc スキームはそれらよりもさらに収束が速くなっていることが見てとれる。またその収束のオーダーは、定理 5.5 や 5.6 で述べられた $O(\sqrt{N} e^{-\sqrt{\pi d \mu N}})$ や $O(\exp(-\pi d N / \log(2dN/\mu)))$ であることも観察される。それに対し RZ スキームは、修正 RZ スキームと同等の収束が観察されるものの、理論的な裏付けはされておらず、また解析解が不明の場合は実装が困難である。その点で修正 RZ スキームは RZ スキームを改善しており、また DE-Sinc スキームはさらに収束性能を向上させたものと言える。

5.4.2 端点特異性をもつ方程式の場合

さらにもう一つ、端点 ($t = 0$) で特異性をもつ次の方程式を考える。

例 5.8 (Polyanin–Manzhurov [109, 方程式 2.1.45 の特別な場合]) 次の第二種 Volterra 積分方

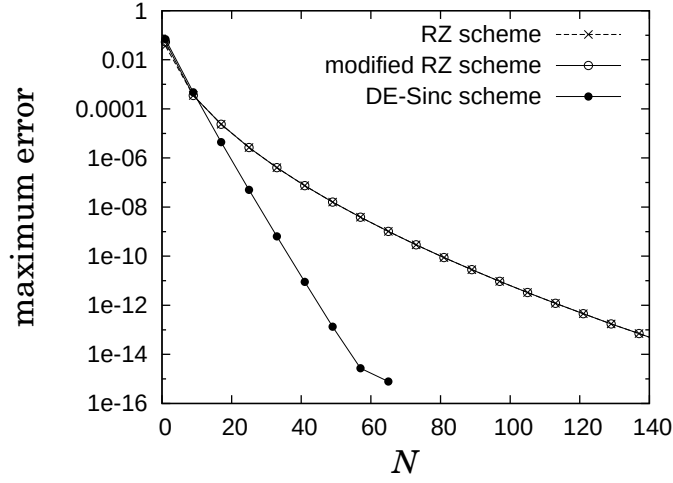


図 5.1 方程式 (5.30) に対する RZ スキーム，修正 RZ スキーム，DE-Sinc スキームの誤差の減少の様子.

程式

$$u(t) + 6 \int_0^t (\sqrt{t} - \sqrt{s})u(s) ds = 1 + \sqrt{t} + 2t\sqrt{t} + t^2, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (5.31)$$

の解は $u(t) = 1 + \sqrt{t}$ である.

π より少し小さい数として $\pi_m = 3.14$ とおくと，定理 5.4 を用いれば，既知関数 g, k を調べることで $u \in \mathbf{M}_{1/2}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi_m}))$ かつ $u \in \mathbf{M}_{1/2}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi_m/2}))$ であることがわかる. そこで修正 RZ スキームでは $\mu = 1/2, d = \pi_m$ として刻み幅 h を式 (5.5) で定め，DE-Sinc スキームでは $\mu = 1/2, d = \pi_m/2$ として刻み幅 h を式 (5.22) で定めた. RZ スキームでは μ と d の定め方が与えられていないが，Rashidinia-Zarebnia [114] は数値実験を全て $\mu = 1/2, d = \pi/2$ として行っているので，その値で刻み幅 h を式 (5.5) で定めた. また，両端点の値が 0 でないことも解析解からわかるので，その事実を用いて RZ スキームの実装を行った. これらの結果を図 5.2 に示す. 修正 RZ スキームは元々の RZ スキームより速く収束しており*2，また DE-Sinc スキームはそれらよりもさらに収束が速くなっていることが見てとれる. またその収束のオーダーは，定理 5.5 や 5.6 で述べられた $O(\sqrt{N}e^{-\sqrt{\pi d \mu N}})$ や $O(\exp(-\pi d N / \log(2dN/\mu)))$ であることも観察される.

5.5 証明：解 u の性質の解析

本節では定理 5.4 を示す. まず，より広い空間 $\mathbf{HC}(\mathcal{D})$ の場合は，定理 3.2 が成り立つ. さらに解 u が $\mathbf{M}_\mu(\mathcal{D})$ に属するためには，定義 2.28 を踏まえると，端点での Hölder 連続性を示せばよい. よって定理 5.4 は次のように示される.

*2 図 5.2 の範囲では RZ スキームの方が誤差が小さいように見えるが，収束速度は修正 RZ スキームの方が速い.

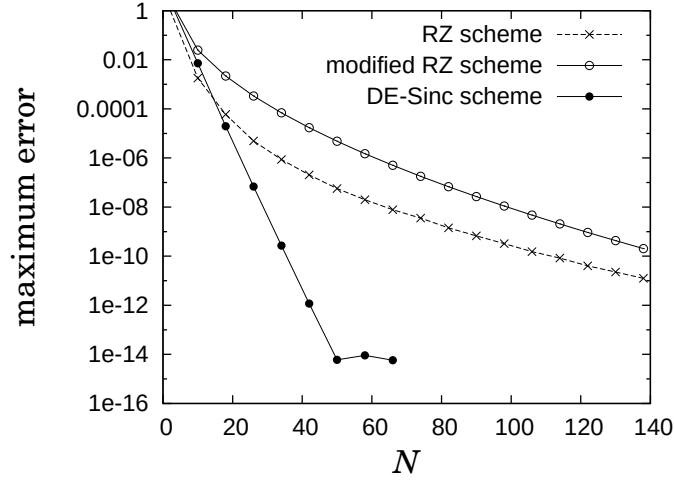


図 5.2 方程式 (5.31) に対する RZ スキーム, 修正 RZ スキーム, DE-Sinc スキームの誤差の減少の様子.

証明. 定理 3.2 の仮定がみたされるので, 方程式 (1.1) には唯一解 $u \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ が存在する. あと端点での Hölder 連続性を示せばよい. $u = \{g + \mathcal{V}u\}/\lambda$ より,

$$\begin{aligned}
 u(b) - u(z) &= \frac{1}{\lambda} \left\{ g(b) + \int_a^b k(b, w)u(w) dw \right\} - \frac{1}{\lambda} \left\{ g(z) + \int_a^z k(z, w)u(w) dw \right\} \\
 &= \frac{1}{\lambda} [g(b) - g(z)] + \frac{1}{\lambda} \left[\int_z^b k(b, w)u(w) dw \right] + \frac{1}{\lambda} \left[\int_a^z \{k(b, w) - k(z, w)\} u(w) dw \right]
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

と変形できる. この式の第一項と第三項は, g と k の Hölder 連続性より $|b - z|^\mu$ の定数倍で評価でき, また第二項は明らかに $|b - z|$ の定数倍で評価できる. さらに定義 2.28 より $0 < \mu \leq 1$ なので, 結局最後の式の $[\cdot]$ は全て $|b - z|^\mu$ の定数倍で評価できる. したがって u は点 b で μ 次 Hölder 連続である. 点 a についても同様に示せるので, $u \in \mathbf{M}_\mu(\mathfrak{D})$ である. ■

5.6 証明：スキームの可解性と収束性の解析

5.6.1 修正 Rashidinia–Zarebnia スキームの誤差解析

ここでは, 定理 5.5 の証明を行う.

証明の流れ

元々の方程式 (1.1) に加えて、次の三つの方程式

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{V}_N^{\text{SE}})v = g, \quad (5.33)$$

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{V}_N^{\text{SE}})w = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} g, \quad (5.34)$$

$$(\lambda E_m^{\text{SE}} - \tilde{V}_m^{\text{SE}})c_m = \tilde{g}_m^{\text{SE}} \quad (5.35)$$

を考えて、次のステップで解析を進める：

1. 方程式 (5.34) が一意可解であれば方程式 (5.35) は一意可解 (補題 5.9).
2. 方程式 (5.33) が一意可解であれば方程式 (5.34) は一意可解 (補題 5.10).
3. 十分大きな N では方程式 (5.33) は一意可解 (補題 3.21).

ステップ 3 は第 3 章の SE-Sinc-Nyström 法の結果であり (方程式 (5.33) は方程式 (3.48) と同じである), この結果に帰着することがここでの主要なアイディアである. 最後に補題 5.9, 補題 5.10 と補題 3.21 をまとめ, 定理 5.5 を示す.

ステップ 1. 方程式 (5.34) が一意可解であれば方程式 (5.35) は一意可解

次の補題が成り立つ. 実は Sinc 選点法に限らず, 一般に選点法ではこのような内容が成り立つ (cf. Atkinson [8, §4.3]) が, 証明も与えておく.

補題 5.9 次の二つは同値である：

- (A) 方程式 (5.34) には一意解 $w \in \mathbf{X}$ が存在する.
- (B) 方程式 (5.35) には一意解 $c_m \in \mathbb{R}^m$ が存在する.

さらに, 修正 RZ スキームの近似解 u_N^{SE} とは $w = u_N^{\text{SE}}$ が成り立つ.

証明. (B) $\Rightarrow$ (A) も同様に示される (補題 6.8 の証明を参照) ので, ここでは (A) $\Rightarrow$ (B) のみ示す. $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}$ の補間の性質 $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}[f](t_i^{\text{SE}}) = f(t_i^{\text{SE}})$ より, 一般に $f \in \mathbf{X}$ に対し

$$(\mathcal{P}_N^{\text{SE}})^2 f = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} f \quad (5.36)$$

(射影の性質) が成り立つことに注意する. 簡便のために, $\mathbf{X}$ が $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}$ によって射影された空間 ($\mathbf{X}$ の部分空間) $\mathbf{X}_N$ を

$$\mathbf{X}_N = \text{span}\{\omega_a, S(-N, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot)), \dots, S(N, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot)), \omega_b\} \quad (5.37)$$

とおく. 方程式 (5.34) の解 w は

$$w = \frac{\mathcal{P}_N^{\text{SE}}}{\lambda}(g + \mathcal{V}_N^{\text{SE}} w) \quad (5.38)$$

と $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}$ が作用された形で表されるので, $w \in \mathbf{X}_N$ であり, ある展開係数 $c_m =$

$[c_{-N-1}, c_{-N}, \dots, c_N, c_{N+1}]^\top$ を用いて

$$w(t) = c_{-N-1}\omega_a(t) + \sum_{j=-N}^N c_j S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) + c_{N+1}\omega_b(t) \quad (5.39)$$

と表される. $w \in \mathbf{X}_N$ より $w = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} w$ であることから, 式 (5.38) を変形すると

$$\mathcal{P}_N^{\text{SE}} [\lambda w - g - \mathcal{V}_N^{\text{SE}} w] = 0 \quad (5.40)$$

となるが, この方程式は

$$\lambda w(t_i^{\text{SE}}) - \mathcal{V}_N^{\text{SE}}[w](t_i^{\text{SE}}) = g(t_i^{\text{SE}}), \quad i = -N-1, \dots, N+1 \quad (5.41)$$

の成立を要求していることに他ならず, これは連立 1 次方程式 (5.35) そのものである. したがって w の展開係数 c_m は方程式 (5.35) の解であり, 解の存在が示された. 次に, 方程式 (5.35) に異なる解 $\tilde{c}_m = [\tilde{c}_{-N-1}, \tilde{c}_{-N}, \dots, \tilde{c}_N, \tilde{c}_{N+1}]^\top$ が存在したとする. このとき, この $\tilde{c}_m$ を用いて関数 $\tilde{w} \in \mathbf{X}$ を

$$\tilde{w}(t) = \tilde{c}_{-N-1}\omega_a(t) + \sum_{j=-N}^N \tilde{c}_j S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) + \tilde{c}_{N+1}\omega_b(t) \quad (5.42)$$

と定めると, $\tilde{c}$ は連立 1 次方程式 (5.35) の解であったので,

$$\lambda \tilde{w}(t_i^{\text{SE}}) - \mathcal{V}_N^{\text{SE}}[\tilde{w}](t_i^{\text{SE}}) = g(t_i^{\text{SE}}), \quad i = -N-1, \dots, N+1 \quad (5.43)$$

が成り立つ. これは上述のように

$$\mathcal{P}_N^{\text{SE}} [\lambda \tilde{w} - g - \mathcal{V}_N^{\text{SE}} \tilde{w}] = 0 \quad (5.44)$$

と同値であり,

$$\mathcal{P}_N^{\text{SE}} \tilde{w} = \frac{\mathcal{P}_N^{\text{SE}}}{\lambda} (g + \mathcal{V}_N^{\text{SE}} \tilde{w}) \quad (5.45)$$

と書き換えられる. さらに $\tilde{w} \in \mathbf{X}_N$ より $\mathcal{P}_N^{\text{SE}} \tilde{w} = \tilde{w}$ となることに注意すると,

$$\tilde{w} = \frac{\mathcal{P}_N^{\text{SE}}}{\lambda} (g + \mathcal{V}_N^{\text{SE}} \tilde{w}) \quad (5.46)$$

となる. これは $\tilde{w}$ が方程式 (5.34) の解であることを示している. ところで, 仮定より方程式 (5.34) の解は一意であったので, $w = \tilde{w}$ である. したがって $c_m = \tilde{c}_m$ が結論される. さらに, これまでの議論で $\tilde{w}$ は修正 RZ スキームの近似解 u_N^{SE} に他ならないことがわかるので, 補題は示された. ■

ステップ 2. 方程式 (5.33) が一意可解であれば方程式 (5.34) は一意可解

方程式 (5.34) は, 関数近似の作用素 $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}$ と積分近似の作用素 $\mathcal{V}_N^{\text{SE}}$ の二つが含まれており, 直接誤差解析することは難しい. ところが, 修正 RZ スキームのように, 積分近似のサンプリング点集合が選点集合に含まれる場合は, $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}$ が外れている Nyström 法の方程式 (5.33)

と関係がつけられる．選点法から Nyström 法への関係は一般に知られている内容である (cf. Atkinson [8, Theorem 4.3.1]) が，本論文では Nyström 法から選点法への関係も述べた次の補題を示す．

補題 5.10 次の二つは同値である：

- (A) 方程式 (5.33) には一意解 $v \in \mathbf{X}$ が存在する．
- (B) 方程式 (5.34) には一意解 $w \in \mathbf{X}$ が存在する．

さらに，それらの解の間には $w = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} v$ と $v = (g + \mathcal{V}_N^{\text{SE}} w)/\lambda$ の関係が成り立つ．

証明. (B) $\Rightarrow$ (A) も同様に示される (補題 6.9 の証明を参照) ので，ここでは (A) $\Rightarrow$ (B) のみ示す．方程式 (5.33) の解 v を用いて $w = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} v$ とおく．ここで， $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}$ の補間の性質 $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}[f](t_i^{\text{SE}}) = f(t_i^{\text{SE}})$ と，積分近似 $\mathcal{V}_N^{\text{SE}}$ のサンプリング点が選点集合に含まれていることより，一般に $f \in \mathbf{X}$ に対して

$$\mathcal{V}_N^{\text{SE}} \mathcal{P}_N^{\text{SE}} f = \mathcal{V}_N^{\text{SE}} f \quad (5.47)$$

が成り立つ．このことを用いると，方程式 (5.33) の両辺に $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}$ を作用させれば

$$\mathcal{P}_N^{\text{SE}} g = \lambda \mathcal{P}_N^{\text{SE}} v - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{V}_N^{\text{SE}} v = \lambda (\mathcal{P}_N^{\text{SE}} v) - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{V}_N^{\text{SE}} (\mathcal{P}_N^{\text{SE}} v) = (\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{V}_N^{\text{SE}}) w \quad (5.48)$$

と変形できる．これは w が方程式 (5.34) の解であることを示している．次に，方程式 (5.34) に異なる解 $\tilde{w}$ が存在したとする．この $\tilde{w}$ を用いて関数 $\tilde{v}$ を $\tilde{v} = (g + \mathcal{V}_N^{\text{SE}} \tilde{w})/\lambda$ とおくと， $\tilde{v}$ は方程式 (5.34) の解なので

$$\tilde{w} = \frac{\mathcal{P}_N^{\text{SE}}}{\lambda} (g + \mathcal{V}_N^{\text{SE}} \tilde{w}) = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \tilde{v} \quad (5.49)$$

が成り立つ．よって

$$\lambda \tilde{v} = g + \mathcal{V}_N^{\text{SE}} \tilde{w} = g + \mathcal{V}_N^{\text{SE}} \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \tilde{v} = g + \mathcal{V}_N^{\text{SE}} \tilde{v} \quad (5.50)$$

より， $\tilde{v}$ は方程式 (5.33) の解である．ところで方程式 (5.33) の解は一意であったので， $\tilde{v} = v$ である．これより $\tilde{w} = w$ が結論される．以上で補題は証明された．■

ステップ 3. 十分大きな N では方程式 (5.33) は一意可解

このステップは第 3 章の補題 3.21 で完了している．

最終ステップ. 定理 5.5 の証明

次の補題を用意しておく．

補題 5.11 (Okayama et al. [96, Lemma 6.13]) ある定数 C が存在して，任意の N に対して $\|\mathcal{P}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \leq C \log(N+1)$ が成り立つ．

この補題は次の補題より直ちに示されるので，証明は省略する．

補題 5.12 (Stenger [135, p. 142]) $h > 0, j \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}$ とするとき、次が成り立つ：

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \sum_{j=-N}^N |S(j, h)(x)| \leq \frac{2}{\pi} (3 + \log N). \quad (5.51)$$

補題 5.11 に加え、補題 5.9, 5.10 と補題 3.21 の結果を用いて、定理 5.5 は次のように示すことができる。

証明. 補題 5.9 と 5.10 より、 $u_N^{\text{SE}} = w = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} v$ であるので、

$$u - u_N^{\text{SE}} = u - w = u - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} v = (u - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} u) + \mathcal{P}_N^{\text{SE}} (u - v) \quad (5.52)$$

と変形でき、

$$\|u - u_N^{\text{SE}}\|_{\mathbf{X}} \leq \|u - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} u\|_{\mathbf{X}} + \|\mathcal{P}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \|u - v\|_{\mathbf{X}} \quad (5.53)$$

と評価できる。定理 5.4 より、 $u \in \mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ であるので、定理 2.30 が使えて、第一項はある定数 C_1 によって

$$\|u - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} u\|_{\mathbf{X}} \leq C_1 \sqrt{N} e^{-\sqrt{\pi d \mu N}} \quad (5.54)$$

と評価できる。また第二項の $\|\mathcal{P}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ は、補題 5.11 よりある定数 C_2 によって

$$\|\mathcal{P}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \leq C_2 \log(N+1) \quad (5.55)$$

と評価できる。第二項の $\|u - v\|_{\mathbf{X}}$ は、補題 3.21 の結果より、ある定数 C_3 によって

$$\|u - v\|_{\mathbf{X}} \leq C_3 \|\mathcal{V}u - \mathcal{V}_N^{\text{SE}} u\|_{\mathbf{X}} \quad (5.56)$$

と評価できる。次に $\|\mathcal{V}u - \mathcal{V}_N^{\text{SE}} u\|_{\mathbf{X}}$ を評価する。まず $u \in \mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ であるので、 $uQ \in \mathbf{L}_1(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ である。ここで、一般に $\alpha \leq \beta$ ならば $\mathbf{L}_\alpha(\mathfrak{D}) \supseteq \mathbf{L}_\beta(\mathfrak{D})$ であることに注意すると、定義 2.28 より $0 < \mu \leq 1$ であるので、 $uQ \in \mathbf{L}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ である。よって定理 2.26 が使えて、ある定数 C_4 によって

$$\|\mathcal{V}u - \mathcal{V}_N^{\text{SE}} u\|_{\mathbf{X}} \leq C_4 e^{-\sqrt{\pi d \mu n}} \quad (5.57)$$

と評価できる。以上の不等式をまとめると、

$$\begin{aligned} \|u - u_N^{\text{SE}}\|_{\mathbf{X}} &\leq C_1 \sqrt{N} e^{-\sqrt{\pi d \mu N}} + C_2 \log(N+1) \cdot C_3 C_4 e^{-\sqrt{\pi d \mu N}} \\ &\leq \{C_1 + C_2 C_3 C_4\} \sqrt{N} e^{-\sqrt{\pi d \mu N}} \end{aligned} \quad (5.58)$$

のようにして望む評価が得られる。 ■

5.6.2 DE-Sinc スキームの誤差解析

ここでは、定理 5.6 の証明を行う。

証明の流れ

証明の流れはほとんど修正 RZ スキームの場合と同様である．元々の方程式 (1.1) に加えて，次の三つの方程式

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{V}_N^{\text{DE}})v = g, \quad (5.59)$$

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_N^{\text{DE}} \mathcal{V}_N^{\text{DE}})w = \mathcal{P}_N^{\text{DE}} g, \quad (5.60)$$

$$(\lambda E_m^{\text{DE}} - \tilde{V}_m^{\text{DE}})c_m = \tilde{g}_m^{\text{DE}} \quad (5.61)$$

を考えて，次のステップで解析を進める：

1. 方程式 (5.60) が一意可解であれば方程式 (5.61) は一意可解 (補題 5.13).
2. 方程式 (5.59) が一意可解であれば方程式 (5.60) は一意可解 (補題 5.14).
3. 十分大きな N では方程式 (5.59) は一意可解 (補題 3.25).

ステップ 3 は第 3 章の DE-Sinc-Nyström 法の結果であり，やはり最終的にこの結果に帰着して解析する．最後に補題 5.13, 5.14 と補題 3.25 をまとめ，定理 5.6 を示す．

ステップ 1. 方程式 (5.60) が一意可解であれば方程式 (5.61) は一意可解

次の補題が成立する．証明は，補題 5.9 の証明において，SE 変換を DE 変換に置き換えればよい．

補題 5.13 次の二つは同値である：

- (A) 方程式 (5.60) には一意解 $w \in \mathbf{X}$ が存在する．
- (B) 方程式 (5.61) には一意解 $c_m \in \mathbb{R}^m$ が存在する．

さらに，DE-Sinc スキームの近似解 u_N^{DE} とは $w = u_N^{\text{DE}}$ が成り立つ．

ステップ 2. 方程式 (5.59) が一意可解であれば方程式 (5.60) は一意可解

次の補題が成立する．証明は，補題 5.10 の証明において，SE 変換を DE 変換に置き換えればよい．

補題 5.14 次の二つは同値である：

- (A) 方程式 (5.59) には一意解 $v \in \mathbf{X}$ が存在する．
- (B) 方程式 (5.60) には一意解 $w \in \mathbf{X}$ が存在する．

さらに，それらの解の間には $w = \mathcal{P}_N^{\text{DE}} v$ と $v = (g + \mathcal{V}_N^{\text{DE}} w)/\lambda$ の関係が成り立つ．

ステップ 3. 十分大きな N では方程式 (5.59) は一意可解

このステップは第 3 章の補題 3.25 で完了している．

最終ステップ. 定理 5.6 の証明

次の補題を用意しておく. やはり補題 5.12 より直ちに成り立つ.

補題 5.15 (Okayama et al. [96, Lemma 8.6]) ある定数 C が存在して, 任意の N に対して $\|\mathcal{P}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \leq C \log(N+1)$ が成り立つ.

補題 5.15 に加え, 補題 5.13, 5.14 と補題 3.25 の結果を用いて, 定理 5.6 は次のように示すことができる.

証明. 補題 5.13 と 5.14 より, $u_N^{\text{DE}} = w = \mathcal{P}_N^{\text{DE}}v$ であるので,

$$u - u_N^{\text{DE}} = u - w = u - \mathcal{P}_N^{\text{DE}}v = (u - \mathcal{P}_N^{\text{DE}}u) + \mathcal{P}_N^{\text{DE}}(u - v) \quad (5.62)$$

と変形でき,

$$\|u - u_N^{\text{DE}}\|_{\mathbf{x}} \leq \|u - \mathcal{P}_N^{\text{DE}}u\|_{\mathbf{x}} + \|\mathcal{P}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}\|u - v\|_{\mathbf{x}} \quad (5.63)$$

と評価できる. 定理 5.4 より, $u \in \mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ であるので, 定理 2.31 が使えて, 第一項はある定数 C_1 によって

$$\|u - \mathcal{P}_N^{\text{DE}}u\|_{\mathbf{x}} \leq C_1 e^{-\pi dN / \log(2dN/\mu)} \quad (5.64)$$

と評価できる. また第二項の $\|\mathcal{P}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ は, 補題 5.15 よりある定数 C_2 によって

$$\|\mathcal{P}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \leq C_2 \log(N+1) \quad (5.65)$$

と評価できる. 第二項の $\|u - v\|_{\mathbf{x}}$ は, 補題 3.25 の結果より, ある定数 C_3 によって

$$\|u - v\|_{\mathbf{x}} \leq C_3 \|\mathcal{V}u - \mathcal{V}_N^{\text{DE}}u\|_{\mathbf{x}} \quad (5.66)$$

と評価できる. 次に $\|\mathcal{V}u - \mathcal{V}_N^{\text{DE}}u\|_{\mathbf{x}}$ を評価する. 定理 5.5 の証明のときと同様, $u \in \mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ から $uQ \in \mathbf{L}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ が結論されるので, 定理 2.27 が使えて, ある定数 C_4 によって

$$\|\mathcal{V}u - \mathcal{V}_N^{\text{DE}}u\|_{\mathbf{x}} \leq C_4 \frac{\log(2dN/\mu)}{N} e^{-\pi dN / \log(2dN/\mu)} \quad (5.67)$$

と評価できる. 以上の不等式をまとめると, 望む評価が得られる. ■

第 6 章

Fredholm 積分方程式に対する Sinc 選点法

本章では，Fredholm 積分方程式 (1.2) に対して Rashidinia–Zarebnia [112] によって提案された Sinc 選点法の改良とその理論解析を行う．まず第 6.1 節で彼らの結果をまとめた後，第 6.2 節で議論すべき点と，改善のアイディアについて述べる．第 6.3 節で具体的に改善したスキームや，理論解析の結果を述べる．第 6.4 節では，本論文の結果が確認できる数値実験結果を示す．第 6.5 節と第 6.6 節は証明である．

6.1 Rashidinia–Zarebnia による SE-Sinc 選点法

ここでは Rashidinia–Zarebnia [112] により導出された，SE 変換を用いた Sinc 選点法 (SE-Sinc 選点法) を説明する．方程式 (1.2) の解 u を $u \in \mathbf{L}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ と仮定する．さらに u の端点の値で第 5.1 節で述べたように四通りに場合分けし，それに応じて，展開係数 $u_{-N-1}, u_{-N}, \dots, u_N, u_{N+1}$ を用いて近似解 u_N^{RZ} を構成する．

この近似解 u_N^{RZ} に基づいてスキームを構成するが，ここでも簡単のために，先に記した 4 通りのうち場合 1 に限って説明する．場合 2～4 も同様に扱われる．方程式 (1.2) の解 u が場合 1 の条件をみたすとし，式 (5.1) のように近似解 u_N^{RZ} を設定する．ただし本節を通じて，刻み幅 h は式 (2.56) に基づいて

$$h = \sqrt{\frac{2\pi d}{\mu N}} \quad (6.1)$$

で定める．上記の u_N^{RZ} を方程式 (1.2) に代入し， $m = 2N + 3$ 個の選点を式 (5.6) で定め，方程式を離散化する．ただし積分は定理 2.19 に基づき

$$\int_a^b k(t_i^{\text{RZ}}, s) u_N^{\text{RZ}}(s) ds \approx h \sum_{j=-N}^N k(t_i^{\text{RZ}}, t_j^{\text{RZ}}) u_N^{\text{RZ}}(t_j^{\text{RZ}}) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \quad (6.2)$$

と近似する．さらに， $\delta_{ij}^{(0)}$ は Kronecker のデルタとし， $m \times m$ 行列 K_m^{RZ} を

$$(K_m^{\text{RZ}})_{ij} = h k(t_i^{\text{RZ}}, t_j^{\text{RZ}}) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh), \quad i, j = -N-1, -N, \dots, N, N+1 \quad (6.3)$$

で定め、 m 次元ベクトル $\mathbf{g}_m^{\text{RZ}}$ を式 (5.9) で定めた上で、 $u_N^{\text{RZ}}(t_j^{\text{RZ}}) = u_j$ の関係に注意して変形すると、離散化された方程式は、展開係数 $\mathbf{u}_m = [u_{-N-1}, \dots, u_{N+1}]^\top$ に関する連立 1 次方程式

$$(\lambda I_m - K_m^{\text{RZ}})\mathbf{u}_m = \mathbf{g}_m^{\text{RZ}} \quad (6.4)$$

となる。この方程式を解いて $\mathbf{u}_m$ を求めれば、式 (5.1) で近似解 u_N^{RZ} が定まる。これが Rashidinia–Zarebnia による SE-Sinc 選点法である。以後、簡便のために RZ スキームと呼ぶ。このスキームに対する誤差解析は与えられていない。

注意 6.1 第 4 章における SE-Sinc-Nyström 法と、本章における SE-Sinc 選点法では、近似解 u_N^{SE} の設定法が異なる。SE-Sinc-Nyström 法では、近似解は式 (4.3) のように関数 g, k を用いて展開されているが、SE-Sinc 選点法は基底関数は $\omega_a, \omega_b, S(j, h)$ を用いて展開した形で設定している。この違いは、以降で述べる DE 変換を用いた場合にも言えることである。

6.2 Rashidinia–Zarebnia の結果に関する議論と改良のアイデア

上述した Rashidinia–Zarebnia による結果には、実装上、および理論解析の観点から、改良の余地がある。本節ではそれらをまとめた上、次節で与える改良方法のアイデアを示す。

6.2.1 RZ スキームの修正について

RZ スキームでは、解 u の端点の値によって 4 通りに場合分けして近似解 u_N^{RZ} を設定していたが、前章と同様の理由により、この設定は現実的ではない。そこで、解 u の端点の値によって近似式を変更する必要のない、一般化 SE-Sinc 関数近似 (2.77) に基づく解の近似である式 (5.12) を考え、一般化 SE-Sinc 関数近似が高精度となる条件 $u \in \mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ を想定して、スキームの設計および理論を展開する。加えて、Rashidinia–Zarebnia の定めた選点 (5.6) を、式 (5.13) のように取り直す。この理由も前章と同様である。

さらに、本章 (Fredholm 積分方程式) の場合には刻み幅 h の決定式の修正を行う。彼らは方程式 (1.2) の場合は、解 u の近似と定積分の近似に用いられる h を共通して式 (6.1) で定めている。この場合、定積分の近似精度は定理 2.19 より $O(e^{-\sqrt{2\pi d\mu N}})$ であるが、解 u の近似精度は系 2.18.a より $O(e^{-\sqrt{\pi d\mu N/2}})$ であるため、全体の収束速度はより遅い収束に引きずられ、 $O(e^{-\sqrt{\pi d\mu N/2}})$ となる。これに対し我々は、 h はいずれも共通して式 (5.5) で定める。このとき、定積分の近似精度は系 2.19.a より $O(e^{-\sqrt{\pi d\mu N}})$ で、解 u の近似精度は定理 2.18 より $O(\sqrt{N}e^{-\sqrt{\pi d\mu N}})$ であるので、全体の収束速度は $O(\sqrt{N}e^{-\sqrt{\pi d\mu N}})$ となり、より速い収束速度が得られる。

RZ スキームに対して以上の改良を加えたものを、以後「修正 Rashidinia–Zarebnia スキーム」と呼び、§6.3.2 で詳述する。

6.2.2 積分方程式の解が属する関数空間について（論点 1 に関連）

RZ スキームでは、積分方程式 (1.2) の解、すなわち、未知関数 u が関数空間 $\mathbf{L}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ に属すると仮定し、その μ と d の値を用いて、刻み幅 h を式 (6.1) で定めている。しかしながら、 u はこれから求めようとする関数であるので、事前に u を調べて μ と d の値を知ることができる、という想定は現実的ではない。この問題点は前章と同様である。そこで本論文では、やはり前章と同様に、方程式の解 u が $\mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ （後に出てくる DE-Sinc スキームでは $\mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ ）に属する条件を、方程式に含まれる既知関数 $k(t, s)$, $g(t)$ に関する条件として与える。このことを §6.3.1 で示す。

6.2.3 収束定理について（論点 2 に関連）

Fredholm 積分方程式に対しては、Rashidinia-Zarebnia は誤差解析を行っていない。それに対し本論文では、 $u(a)$ や $u(b)$ が 0 とは限らない一般の場合の誤差解析の定理を §6.3.2 で示す。

6.2.4 新規に提案する DE-Sinc スキームについて

また、以上は全て SE 変換を用いた Sinc 選点法についてであったが、本章においても、やはりこの結果を DE 変換を用いた Sinc 選点法（DE-Sinc スキーム）の場合に拡張する。スキームの違いは変数変換にあるが、DE 変換を用いる場合には、誤差は $O(\exp(-c_2 N / \log N))$ となり、SE 変換を用いた場合よりも格段に収束が速くなる。この結果を §6.3.3 で示す。

6.3 主結果：Sinc 選点法の改良とその理論解析

6.3.1 解 u の性質の解析

本論文では、方程式 (1.2) の解 u が、一般化 Sinc 関数近似に適した空間 $\mathbf{M}_\mu(\mathcal{D})$ に属する条件について、次のような結果を得た。証明は第 6.5 節で与える。

定理 6.2 (岡山ら [91, 定理 4.4]) 任意の $z, w \in \overline{\mathcal{D}}$ に対し、 $k(\cdot, w) \in \mathbf{M}_\mu(\mathcal{D})$ かつ $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ とし、また $g \in \mathbf{M}_\mu(\mathcal{D})$ とする。このとき、方程式 (1.2) には唯一解 $u \in \mathbf{M}_\mu(\mathcal{D})$ が存在する。

SE 変換を用いる場合は、 $g, k(\cdot, w) \in \mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ かつ $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ ならば $u \in \mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ となるのがこの定理で保証されるので、この d, μ を式 (5.5) で用いればよい。同じく DE 変換を用いる場合も、関数 g と k の d と μ を調べれば、これらを式 (5.22) で用いることができる。このように、定理 5.4 を用いることで、関数 u が不明な場合でも刻み幅 h の決定式で用いるパラメータ d, μ を定められる。ただし、注意 3.3 で述べた内容と同じことが今回も言えることを注意しておく。

6.3.2 修正 Rashidinia–Zarebnia スキームの導出とその誤差解析

ここでは、§6.2.1 で言及した修正 Rashidinia–Zarebnia スキームの具体形を示し、その誤差解析結果を述べる。繰り返しになるが、主な修正点は近似解の設定（場合分けは行わない）、選点の取り方、および刻み幅 h の定め方であることを注意しておく。

解 u は $u \in \mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ であるとし、近似解 u_N^{SE} を式 (5.12) のようにおく。刻み幅 h は式 (5.5) で定める。 u_N^{SE} を方程式 (1.2) に代入した上で、選点 $t = t_i^{\text{SE}}$ 上で方程式を離散化する。ただし方程式中の積分作用素 $\mathcal{K}$ は、系 2.19.a に基づいて、式 (4.25) の作用素 $\mathcal{K}_N^{\text{SE}}$ で近似する。刻み幅 h はやはり式 (5.5) で定める。ここで、 $m \times m$ 行列 E_m^{SE} を式 (5.16) で、 $\tilde{K}_m^{\text{SE}}$ を

$$\tilde{K}_m^{\text{SE}} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_N^{\text{SE}}[\omega_a](a) & \cdots & hk(a, t_j^{\text{SE}})\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) & \cdots & \mathcal{K}_N^{\text{SE}}[\omega_b](a) \\ \mathcal{K}_N^{\text{SE}}[\omega_a](t_{-N}^{\text{SE}}) & \cdots & hk(t_{-N}^{\text{SE}}, t_j^{\text{SE}})\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) & \cdots & \mathcal{K}_N^{\text{SE}}[\omega_b](t_{-N}^{\text{SE}}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{K}_N^{\text{SE}}[\omega_a](t_N^{\text{SE}}) & \cdots & hk(t_N^{\text{SE}}, t_j^{\text{SE}})\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) & \cdots & \mathcal{K}_N^{\text{SE}}[\omega_b](t_N^{\text{SE}}) \\ \mathcal{K}_N^{\text{SE}}[\omega_a](b) & \cdots & hk(b, t_j^{\text{SE}})\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) & \cdots & \mathcal{K}_N^{\text{SE}}[\omega_b](b) \end{bmatrix} \quad (6.5)$$

で定め、 m 次元ベクトル $\tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{SE}}$ を式 (5.18) で定めると、離散化された方程式は次のようになる：

$$(\lambda E_m^{\text{SE}} - \tilde{K}_m^{\text{SE}})\mathbf{u}_m = \tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{SE}}. \quad (6.6)$$

この連立 1 次方程式を解いて $\mathbf{u}_m$ を求めれば、式 (5.12) によって近似解 u_N^{SE} が定まる。

本論文ではここに示した修正 RZ スキームに対し、次の誤差解析結果を得た。証明は §6.6.1 で与える。

定理 6.3 (岡山ら [91, 定理 7.3]) 定理 6.2 の仮定が $\mathcal{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする。このときある自然数 N_0 が存在して、 $N \geq N_0$ をみたす任意の自然数 N に対し、連立 1 次方程式 (6.6) は一意可解で、近似誤差は N によらないある定数 C によって、次のように評価できる：

$$\|u - u_N^{\text{SE}}\|_{\mathbf{X}} \leq C\sqrt{N}e^{-\sqrt{\pi d\mu}N}. \quad (6.7)$$

6.3.3 DE-Sinc スキームの導出とその誤差解析

次に、上述した修正 RZ スキームの収束次数をさらに改善する、DE 変換を用いた Sinc 選点法 (DE-Sinc スキーム) を導出し、その誤差解析結果を述べる。

解 u は $u \in \mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ であるとし、近似解 u_N^{DE} を式 (5.21) のようにおく。刻み幅 h は式 (5.22) で定める。 u_N^{DE} を方程式 (1.2) に代入した上で、式 (5.23) で定める選点上で離散化して、連立 1 次方程式を立てる。ただし方程式中の積分作用素 $\mathcal{K}$ は、系 2.23.a に基づいて、式 (4.41) の作用素 $\mathcal{K}_N^{\text{DE}}$ で近似する。ただし刻み幅 h はやはり式 (5.22) で定める。ここで、

$m \times m$ 行列 E_m^{DE} を式 (5.25) で定め、 $\tilde{K}_m^{\text{DE}}$ を

$$\tilde{K}_m^{\text{DE}} = \begin{bmatrix} \mathcal{K}_N^{\text{DE}}[\omega_a](a) & \cdots & hk(a, t_j^{\text{DE}})\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) & \cdots & \mathcal{K}_N^{\text{DE}}[\omega_b](a) \\ \mathcal{K}_N^{\text{DE}}[\omega_a](t_{-N}^{\text{DE}}) & \cdots & hk(t_{-N}^{\text{DE}}, t_j^{\text{DE}})\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) & \cdots & \mathcal{K}_N^{\text{DE}}[\omega_b](t_{-N}^{\text{DE}}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{K}_N^{\text{DE}}[\omega_a](t_N^{\text{DE}}) & \cdots & hk(t_N^{\text{DE}}, t_j^{\text{DE}})\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) & \cdots & \mathcal{K}_N^{\text{DE}}[\omega_b](t_N^{\text{DE}}) \\ \mathcal{K}_N^{\text{DE}}[\omega_a](b) & \cdots & hk(b, t_j^{\text{DE}})\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) & \cdots & \mathcal{K}_N^{\text{DE}}[\omega_b](b) \end{bmatrix} \quad (6.8)$$

で定め、 m 次元ベクトル $\tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{DE}}$ を式 (5.27) で定めると、離散化された方程式は次のようになる：

$$(\lambda E_m^{\text{DE}} - \tilde{K}_m^{\text{DE}})\mathbf{u}_m = \tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{DE}}. \quad (6.9)$$

この連立 1 次方程式を解いて $\mathbf{u}_m$ を求めれば、式 (5.21) によって近似解 u_N^{DE} が定まる。

本論文ではここに示した DE-Sinc スキームに対し、次の誤差解析結果を得た。証明は §6.6.2 で与える。

定理 6.4 (岡山ら [91, 定理 9.2]) 定理 6.2 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathscr{D}_d)$ としてみたされているとする。このときある自然数 N_0 が存在して、 $N \geq N_0$ をみたす任意の自然数 N に対し、連立 1 次方程式 (6.9) は一意可解で、近似誤差は N によらないある定数 C によって、次のように評価できる：

$$\|u - u_N^{\text{DE}}\|_{\mathbf{X}} \leq C e^{-\pi d N / \log(2dN/\mu)}. \quad (6.10)$$

6.4 数値実験

本節では数値実験結果を示す。実験の目的は、RZ スキームと、本論文で導出した修正 RZ スキーム・DE-Sinc スキームとの性能比較を行うこと、そして収束速度の確認である。実装言語は C++ で、浮動小数点数には double 型を用いた。連立 1 次方程式を解くにあたっては LU 分解を用いた。

6.4.1 特異性をもたない方程式の場合

まず、Rashidinia–Zarebnia [112] がとりあげた次の方程式を考える。

例 6.5 (Rashidinia–Zarebnia [112, Example 1]) 次の第二種 Fredholm 積分方程式

$$u(t) - \int_0^1 (3s - 6t^2)u(s) ds = \frac{1}{4} - t, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (6.11)$$

の解は $u(t) = t(t-1)$ である。

π より少し小さい数として $\pi_m = 3.14$ とおくと、定理 6.2 を用いれば、既知関数 g, k を調べることで $u \in \mathbf{M}_1(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathscr{D}_{\pi_m}))$ かつ $u \in \mathbf{M}_1(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathscr{D}_{\pi_m/2}))$ であることがわかる。そこで修正 RZ スキームでは $\mu = 1, d = \pi_m$ として刻み幅 h を式 (5.5) で定め、DE-Sinc スキー

表 6.1 例 6.5 に対する計算結果.

N	h (6.1)	E_N^{RZ}	h (5.5)	E_N^{SE}	h (5.22)	E_N^{DE}
5	1.98692	7.16816e-03	1.40461	6.21548e-04	0.550732	1.37362e-03
10	1.40496	3.11497e-04	0.993207	5.07910e-06	0.344681	4.92750e-07
15	1.14715	2.39353e-05	0.810950	1.06313e-07	0.256818	1.59098e-10
20	0.993459	2.55171e-06	0.702303	3.77483e-09	0.206998	5.55627e-14
25	0.888577	3.40053e-07	0.628159	1.90739e-10	0.174524	1.72236e-16
30	0.811156	5.34663e-08	0.573428	1.24724e-11	0.151514	1.77636e-16
35	0.750984	9.56543e-09	0.530891	9.95601e-13	0.134273	2.09766e-16
40	0.702481	1.90005e-09	0.496603	9.33555e-14	0.120828	1.66610e-16
45	0.662306	4.11757e-10	0.468202	1.00659e-14	0.110020	3.10862e-16
50	0.628319	9.60836e-11	0.444176	1.03095e-15	0.101125	5.32907e-16

ムでは $\mu = 1$, $d = \pi_m/2$ として刻み幅 h を式 (5.22) で定めた. それに対し Rashidinia-Zarebnia [112] は, $\mu = 1/2$, $d = \pi/2$ として刻み幅 h を式 (6.1) で定めている. これらの h の値を表 6.1 に示す. 表中, E_N^{RZ} , E_N^{SE} , E_N^{DE} はそれぞれ

$$E_N^{\text{RZ}} = \max_{i=-N, \dots, N} |u(t_i^{\text{RZ}}) - u_N^{\text{RZ}}(t_i^{\text{RZ}})|, \quad (6.12)$$

$$E_N^{\text{SE}} = \max_{i=-N-1, -N, \dots, N, N+1} |u(t_i^{\text{SE}}) - u_N^{\text{SE}}(t_i^{\text{SE}})|, \quad (6.13)$$

$$E_N^{\text{DE}} = \max_{i=-N-1, -N, \dots, N, N+1} |u(t_i^{\text{DE}}) - u_N^{\text{DE}}(t_i^{\text{DE}})| \quad (6.14)$$

で定義される, 選点上の最大誤差である. さらに, E_{1001} は,

$$E_{1001} = \max_{i=0, 1, \dots, 999, 1000} |u(t_i) - u_N(t_i)| \quad (6.15)$$

で定義される, 等間隔点上における最大誤差である. この誤差をプロットしたものを図 6.1 に示す. 表 6.1 や図 6.1 より, 修正 RZ スキームは元々の RZ スキームを改善しており, また DE-Sinc スキームはそれらよりもさらに収束が速くなっていることが見てとれる. またその収束のオーダーは, 定理 6.3 や 6.4 で述べられた $O(\sqrt{N}e^{-\sqrt{\pi d \mu N}})$ や $O(\exp(-\pi d N / \log(2dN/\mu)))$ であることも観察される. それに対し RZ スキームは $O(e^{-\sqrt{\pi d \mu N/2}})$ であることが観察され, これは §6.2.1 で議論した内容と一致している.

6.4.2 端点特異性をもつ方程式の場合

さらにもう一つ, 端点 ($t = 0$) で特異性をもつ次の方程式を考える.

例 6.6 (Delves–Mohamed [33, Example 4.2.5]) 次の第二種 Fredholm 積分方程式

$$u(x) - \int_0^{\pi/2} (xt)^{3/4} u(t) dt = x^{1/2} \left\{ 1 - \frac{\pi^2}{9} \left(\frac{\pi x}{2} \right)^{1/4} \right\}, \quad 0 \leq x \leq \pi/2, \quad (6.16)$$

の解は $u(t) = \sqrt{t}$ である.

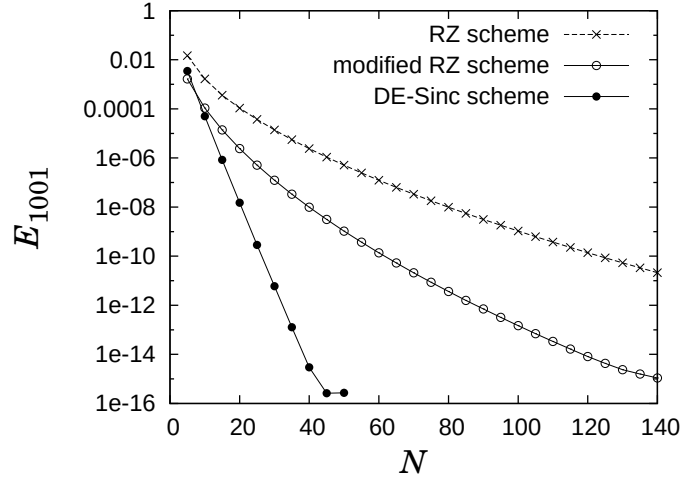


図 6.1 方程式 (6.11) に対する RZ スキーム，修正 RZ スキーム，DE-Sinc スキームの誤差の減少の様子.

π より少し小さい数として $\pi_m = 3.14$ とおくと，定理 6.2 を用いれば，既知関数 g, k を調べることで $u \in \mathbf{M}_{1/2}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi_m}))$ かつ $u \in \mathbf{M}_{1/2}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi_m/2}))$ であることがわかる．そこで修正 RZ スキームでは $\mu = 1/2, d = \pi_m$ として刻み幅 h を式 (5.5) で定め，DE-Sinc スキームでは $\mu = 1/2, d = \pi_m/2$ として刻み幅 h を式 (5.22) で定めた．RZ スキームでは μ と d の定め方が与えられていないが，ここでは修正 RZ スキームの μ と d の値を用い，刻み幅 h を式 (6.1) で定めて計算を行った．計算結果を図 6.2 に示す．修正 RZ スキームは元々の RZ スキームを改善しており，また DE-Sinc スキームはそれらよりもさらに収束が速くなっていることが見てとれる．またその収束のオーダーは，定理 6.3 や 6.4 で述べられた $O(\sqrt{N}e^{-\sqrt{\pi d \mu N}})$ や $O(\exp(-\pi d N / \log(2dN/\mu)))$ であることも観察される．それに対し RZ スキームは $O(e^{-\sqrt{\pi d \mu N/2}})$ であることが観察され，これは §6.2.1 で議論した内容と一致している．

6.5 証明：解 u の性質の解析

本節では定理 6.2 を示す．まず，より広い空間 $\mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ の場合は，定理 4.3 が成り立つ．さらに解 u が $\mathbf{M}_\mu(\mathfrak{D})$ に属するための条件は，次のように与えられている．

定理 6.7 (Stenger [137, Theorem 6.1]) 任意の $t \in [a, b]$ と $s \in [a, b]$ に対し， $k(t, \cdot)$ は有界，かつ $k(\cdot, s) \in \mathbf{M}_\mu(\mathfrak{D})$ とし，また $g \in \mathbf{M}_\mu(\mathfrak{D})$ であるとする．このとき，方程式 (1.2) の解 u が存在するならば， $u \in \mathbf{M}_\mu(\mathfrak{D})$ である．

よって定理 4.3 と 6.7 をあわせれば，定理 6.2 が成り立つことがわかる．

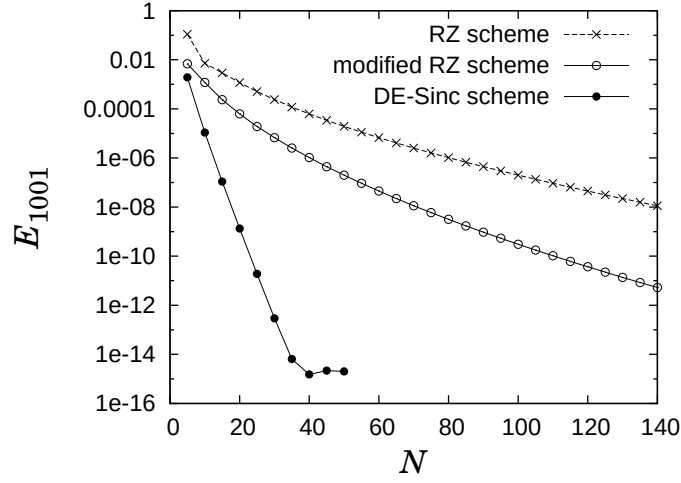


図 6.2 方程式 (6.16) に対する RZ スキーム, 修正 RZ スキーム, DE-Sinc スキームの誤差の減少の様子.

6.6 証明：スキームの可解性と収束性の解析

6.6.1 修正 Rashidinia–Zarebnia スキームの誤差解析

ここでは, 定理 6.3 の証明を行う.

証明の流れ

元々の方程式 (1.2) に加えて, 次の三つの方程式

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{K}_N^{\text{SE}})v = g, \quad (6.17)$$

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{K}_N^{\text{SE}})w = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} g, \quad (6.18)$$

$$(\lambda E_m^{\text{SE}} - \tilde{K}_m^{\text{SE}})c_m = \tilde{g}_m^{\text{SE}} \quad (6.19)$$

を考えて, 次のステップで解析を進める:

1. 方程式 (6.18) が一意可解であれば方程式 (6.19) は一意可解 (補題 6.8).
2. 方程式 (6.17) が一意可解であれば方程式 (6.18) は一意可解 (補題 6.9).
3. 十分大きな N では方程式 (6.17) は一意可解 (補題 4.17).

ステップ 3 は第 4 章の SE-Sinc-Nyström 法の結果であり (方程式 (6.17) は方程式 (4.26) と同じである), この結果に帰着することがここでのアイディアである. 最後に補題 6.8, 補題 6.9 と補題 4.17 をまとめ, 定理 6.3 を示す.

ステップ 1. 方程式 (6.18) が一意可解であれば方程式 (6.19) は一意可解

次の補題が成り立つ。実は Sinc 選点法に限らず、一般に選点法ではこのような内容が成り立つ (cf. Atkinson [8, §4.3]) が、証明も与えておく。

補題 6.8 次の二つは同値である：

- (A) 方程式 (6.18) には一意解 $w \in \mathbf{X}$ が存在する。
- (B) 方程式 (6.19) には一意解 $\mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^m$ が存在する。

さらに、修正 RZ スキームの近似解 u_N^{SE} とは $w = u_N^{\text{SE}}$ が成り立つ。

証明. (A) $\Rightarrow$ (B) も同様に示される (補題 5.9 の証明を参照) ので、ここでは (B) $\Rightarrow$ (A) のみ示す。補題 5.9 の証明と同様、式 (5.37) で $\mathbf{X}$ の部分空間 $\mathbf{X}_N$ を定める。方程式 (6.19) の解 $\mathbf{c}_m = [c_{-N-1}, c_{-N}, \dots, c_N, c_{N+1}]^\top$ を用いて関数 w を式 (5.39) で定義すると、 $\mathbf{c}_m$ は連立 1 次方程式 (6.19) の解であったので、

$$\lambda w(t_i^{\text{SE}}) - \mathcal{K}_N^{\text{SE}}[w](t_i^{\text{SE}}) = g(t_i^{\text{SE}}), \quad i = -N-1, \dots, N+1 \quad (6.20)$$

が成り立つ。これは次の方程式

$$\mathcal{P}_N^{\text{SE}} [\lambda w - g - \mathcal{K}_N^{\text{SE}} w] = 0 \quad (6.21)$$

と同値であり、

$$\mathcal{P}_N^{\text{SE}} w = \frac{\mathcal{P}_N^{\text{SE}}}{\lambda} (g + \mathcal{K}_N^{\text{SE}} w) \quad (6.22)$$

と書き換えられる。さらに $w \in \mathbf{X}_N$ より $\mathcal{P}_N^{\text{SE}} w = w$ となることに注意すると、

$$w = \frac{\mathcal{P}_N^{\text{SE}}}{\lambda} (g + \mathcal{K}_N^{\text{SE}} w) \quad (6.23)$$

となる。これは w が方程式 (6.18) の解であることを示しており、解の存在が示された。次に、方程式 (6.18) に異なる解 $\tilde{w} \in X$ が存在したとする。 $\tilde{w}$ は

$$\tilde{w} = \frac{\mathcal{P}_N^{\text{SE}}}{\lambda} (g + \mathcal{K}_N^{\text{SE}} \tilde{w}) \quad (6.24)$$

と $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}$ が作用された形で表されるので、 $\tilde{w} \in \mathbf{X}_N$ であり、ある展開係数 $\tilde{\mathbf{c}}_m = [\tilde{c}_{-N-1}, \tilde{c}_{-N}, \dots, \tilde{c}_N, \tilde{c}_{N+1}]^\top$ を用いて式 (5.42) の形で表される。 $\tilde{w}$ は方程式 (6.18) の解であるので、

$$\tilde{w} = \frac{\mathcal{P}_N^{\text{SE}}}{\lambda} (g + \mathcal{K}_N^{\text{SE}} \tilde{w}) \quad (6.25)$$

が成り立つが、 $w \in \mathbf{X}_N$ より $\tilde{w} = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \tilde{w}$ であることから、これは

$$\mathcal{P}_N^{\text{SE}} [\lambda \tilde{w} - g - \mathcal{K}_N^{\text{SE}} \tilde{w}] = 0 \quad (6.26)$$

と変形できる。この方程式は

$$\lambda \tilde{w}(t_i^{\text{SE}}) - \mathcal{K}_N^{\text{SE}}[\tilde{w}](t_i^{\text{SE}}) = g(t_i^{\text{SE}}), \quad i = -N-1, \dots, N+1 \quad (6.27)$$

の成立を要求していることに他ならず，よって $\tilde{c}_m$ は連立 1 次方程式 (6.19) の解である．ところで方程式 (6.19) の解は一意であったので， $c_m = \tilde{c}_m$ である．式 (5.39) と (5.42) より，これは $w = \tilde{w}$ を意味する．さらに，これまでの議論で w は修正 RZ スキームの近似解 u_N^{SE} に他ならないことがわかるので，補題は示された．■

ステップ 2. 方程式 (6.17) が一意可解であれば方程式 (6.18) は一意可解

方程式 (6.18) は，関数近似の作用素 $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}$ と積分近似の作用素 $\mathcal{K}_N^{\text{SE}}$ の二つが含まれており，直接誤差解析することは難しい．ところが，修正 RZ スキームのように，積分近似のサンプリング点集合が選点集合に含まれる場合は， $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}$ が外れている Nyström 法の方程式 (6.17) と関係がつけられる．選点法から Nyström 法への関係は一般に知られている内容である (cf. Atkinson [8, Theorem 4.3.1]) が，本論文では Nyström 法から選点法への関係も述べた次の補題を示す．

補題 6.9 次の二つは同値である：

- (A) 方程式 (6.17) には一意解 $v \in \mathbf{X}$ が存在する．
- (B) 方程式 (6.18) には一意解 $w \in \mathbf{X}$ が存在する．

さらに，それらの解の間には $w = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} v$ と $v = (g + \mathcal{K}_N^{\text{SE}} w)/\lambda$ の関係が成り立つ．

証明. (A) $\Rightarrow$ (B) も同様に示される (補題 5.10 の証明を参照) ので，ここでは (B) $\Rightarrow$ (A) のみ示す．ここで，やはり $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}$ の補間の性質 $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}[f](t_i^{\text{SE}}) = f(t_i^{\text{SE}})$ と，積分近似 $\mathcal{K}_N^{\text{SE}}$ のサンプリング点が選点集合に含まれていることより，一般に $f \in \mathbf{X}$ に対して

$$\mathcal{K}_N^{\text{SE}} \mathcal{P}_N^{\text{SE}} f = \mathcal{K}_N^{\text{SE}} f \quad (6.28)$$

が成り立つことに注意する．方程式 (6.18) の解 w を用いて関数 v を $v = (g + \mathcal{K}_N^{\text{SE}} w)/\lambda$ とおくと， w は方程式 (6.18) の解なので

$$w = \frac{\mathcal{P}_N^{\text{SE}}}{\lambda} (g + \mathcal{K}_N^{\text{SE}} w) = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} v \quad (6.29)$$

が成り立つ．よって

$$\lambda v = g + \mathcal{K}_N^{\text{SE}} w = g + \mathcal{K}_N^{\text{SE}} \mathcal{P}_N^{\text{SE}} v = g + \mathcal{K}_N^{\text{SE}} v \quad (6.30)$$

より， v は方程式 (6.17) の解である．よって解の存在は示された．次に，方程式 (6.17) に異なる解 $\tilde{v}$ が存在したとする．この方程式 $(\lambda I - \mathcal{K}_N^{\text{SE}})\tilde{v} = g$ の両辺に $\mathcal{P}_N^{\text{SE}}$ を作用させれば

$$\mathcal{P}_N^{\text{SE}} g = \lambda \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \tilde{v} - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{K}_N^{\text{SE}} \tilde{v} = \lambda (\mathcal{P}_N^{\text{SE}} \tilde{v}) - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{K}_N^{\text{SE}} (\mathcal{P}_N^{\text{SE}} \tilde{v}) = (\lambda I - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{K}_N^{\text{SE}}) (\mathcal{P}_N^{\text{SE}} \tilde{v}) \quad (6.31)$$

と変形できる．これは $\tilde{w} = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \tilde{v}$ が方程式 (6.18) の解であることを示している．ところで方程式 (6.18) の解は一意であったので， $w = \tilde{w}$ である．いま， $\tilde{v}$ は

$$\tilde{v} = \frac{1}{\lambda} \{g + \mathcal{K}_N^{\text{SE}} \tilde{v}\} = \frac{1}{\lambda} \{g + \mathcal{K}_N^{\text{SE}} \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \tilde{v}\} = \frac{1}{\lambda} \{g + \mathcal{K}_N^{\text{SE}} \tilde{w}\} \quad (6.32)$$

と表されるので、 $v = (g + \mathcal{K}_N^{\text{SE}} w)/\lambda$ と比較すれば、 $w = \tilde{w}$ は $v = \tilde{v}$ を意味することがわかる。以上で補題は証明された。 ■

ステップ 3. 十分大きな N では方程式 (6.17) は一意可解

このステップは第 4 章の補題 4.17 で完了している。

最終ステップ. 定理 6.3 の証明

補題 5.11 に加え、補題 6.8, 6.9 と補題 4.17 の結果を用いて、定理 6.3 は次のように示すことができる。

証明. 補題 6.8 と 6.9 より、 $u_N^{\text{SE}} = w = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} v$ であるので、評価式 (5.53) が成り立つ。定理 6.2 より、 $u \in \mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ であるので、定理 2.30 が使えて、第一項はある定数 C_1 によって式 (5.54) で評価できる。また第二項の $\|\mathcal{P}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ は、補題 5.11 よりある定数 C_2 によって式 (5.55) で評価できる。第二項の $\|u - v\|_{\mathbf{X}}$ は、補題 4.17 の結果より、ある定数 C_3 によって

$$\|u - v\|_{\mathbf{X}} \leq C_3 \|\mathcal{K}u - \mathcal{K}_N^{\text{SE}} u\|_{\mathbf{X}} \quad (6.33)$$

と評価できる。次に $\|\mathcal{K}u - \mathcal{K}_N^{\text{SE}} u\|_{\mathbf{X}}$ を評価する。まず $u \in \mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ であるので、 $uQ \in \mathbf{L}_1(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ である。ここで、一般に $\alpha \leq \beta$ ならば $\mathbf{L}_\alpha(\mathcal{D}) \supseteq \mathbf{L}_\beta(\mathcal{D})$ であることに注意すると、定義 2.28 より $0 < \mu \leq 1$ であるので、 $uQ \in \mathbf{L}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ である。よって系 2.19.a が使えて、ある定数 C_4 によって

$$\|\mathcal{K}u - \mathcal{K}_N^{\text{SE}} u\|_{\mathbf{X}} \leq C_4 e^{-\sqrt{\pi d \mu n}} \quad (6.34)$$

と評価できる。以上の不等式をまとめると、式 (5.58) のようにして望む評価が得られる。 ■

6.6.2 DE-Sinc スキームの誤差解析

ここでは、定理 6.4 の証明を行う。

証明の流れ

証明の流れはほとんど修正 RZ スキームの場合と同様である。元々の方程式 (1.2) に加えて、次の三つの方程式

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{K}_N^{\text{DE}})v = g, \quad (6.35)$$

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_N^{\text{DE}} \mathcal{K}_N^{\text{DE}})w = \mathcal{P}_N^{\text{DE}} g, \quad (6.36)$$

$$(\lambda E_m^{\text{DE}} - \tilde{K}_m^{\text{DE}})c_m = \tilde{g}_m^{\text{DE}} \quad (6.37)$$

を考えて、次のステップで解析を進める：

1. 方程式 (6.36) が一意可解であれば方程式 (6.37) は一意可解 (補題 6.10)。
2. 方程式 (6.35) が一意可解であれば方程式 (6.36) は一意可解 (補題 6.11)。

3. 十分大きな N では方程式 (6.35) は一意可解 (補題 4.21).

ステップ 3 は第 4 章の DE-Sinc-Nyström 法の結果であり, やはり最終的にこの結果に帰着して解析する. 最後に補題 6.10, 6.11 と補題 4.21 をまとめ, 定理 6.4 を示す.

ステップ 1. 方程式 (6.36) が一意可解であれば方程式 (6.37) は一意可解

次の補題が成立する. 証明は, 補題 6.8 の証明において, SE 変換を DE 変換に置き換えればよい.

補題 6.10 次の二つは同値である:

- (A) 方程式 (6.36) には一意解 $w \in \mathbf{X}$ が存在する.
- (B) 方程式 (6.37) には一意解 $\mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^m$ が存在する.

さらに, DE-Sinc スキームの近似解 u_N^{DE} とは $w = u_N^{\text{DE}}$ が成り立つ.

ステップ 2. 方程式 (6.35) が一意可解であれば方程式 (6.36) は一意可解

次の補題が成立する. 証明は, 補題 6.9 の証明において, SE 変換を DE 変換に置き換えればよい.

補題 6.11 次の二つは同値である:

- (A) 方程式 (6.35) には一意解 $v \in \mathbf{X}$ が存在する.
- (B) 方程式 (6.36) には一意解 $w \in \mathbf{X}$ が存在する.

さらに, それらの解の間には $w = \mathcal{P}_N^{\text{DE}} v$ と $v = (g + \mathcal{K}_N^{\text{DE}} w)/\lambda$ の関係が成り立つ.

ステップ 3. 十分大きな N では方程式 (6.35) は一意可解

このステップは第 4 章の補題 4.21 で完了している.

最終ステップ. 定理 6.4 の証明

補題 5.15 に加え, 補題 6.10, 6.11 と補題 4.21 の結果を用いて, 定理 6.4 は次のように示すことができる.

証明. 補題 6.10 と 6.11 より, $u_N^{\text{DE}} = w = \mathcal{P}_N^{\text{DE}} v$ であるので, 評価式 (5.64) が成り立つ. 定理 6.2 より, $u \in \mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ であるので, 定理 2.31 が使えて, 第一項はある定数 C_1 によって式 (5.64) で評価できる. また第二項の $\|\mathcal{P}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ は, 補題 5.15 よりある定数 C_2 によって式 (5.65) で評価できる. 第二項の $\|u - v\|_{\mathbf{X}}$ は, 補題 4.21 の結果より, ある定数 C_3 によって

$$\|u - v\|_{\mathbf{X}} \leq C_3 \|\mathcal{K}u - \mathcal{K}_N^{\text{DE}} u\|_{\mathbf{X}} \quad (6.38)$$

と評価できる. 次に $\|\mathcal{K}u - \mathcal{K}_N^{\text{DE}} u\|_{\mathbf{X}}$ を評価する. 定理 6.3 の証明のときと同様, $u \in$

$\mathbf{M}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ から $uQ \in \mathbf{L}_\mu(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ が結論されるので，系 2.23.a が使えて，ある定数 C_4 によって

$$\|\mathcal{V}u - \mathcal{V}_N^{\text{DE}}u\|_{\mathbf{X}} \leq C_4 e^{-2\pi dN/\log(2dN/\mu)} \quad (6.39)$$

と評価できる．以上の不等式をまとめると，望む評価が得られる． ■

第 7 章

弱特異核を持つ Volterra 積分方程式 式に対する Sinc 選点法

本章では，弱特異核を持つ Volterra 積分方程式 (1.5) に対して Riley [117, 118] と Mori et al. [78] によって提案された Sinc 選点法の改良とその理論解析を行う．まず第 7.1 節で彼らの結果をまとめた後，第 7.2 節で議論すべき点と，改善のアイディアについて述べる．第 7.3 節で具体的に改善したスキームや，理論解析の結果を述べる．第 7.4 節では，本論文の結果が確認できる数値実験結果を示す．第 7.5 節と第 7.6 節は証明である．

7.1 Riley/Mori et al. による Sinc 選点法

7.1.1 Riley による SE-Sinc 選点法とその誤差解析

ここでは Riley [117, 118] により導出された，SE 変換を用いた Sinc 選点法 (SE-Sinc 選点法) を説明する．方程式 (1.5) の解 u を $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ と仮定し，近似解 u_N^{SE} を未知係数 $u_{-N}, \dots, u_M, u_{M+1}$ を用いて

$$u_N^{\text{SE}}(t) = g(a) + \sum_{j=-N}^M u_j S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) + u_{M+1} \omega_b(t) \quad (7.1)$$

で設定する．これは，方程式 (1.5) より $u(a) = g(a)$ であるので，近似解も $u_N^{\text{SE}}(a) = g(a)$ となるように設定した形である．ただし刻み幅 h と M は， N に対して

$$h = \sqrt{\frac{\pi d}{pN}}, \quad (7.2)$$

$$M = \lceil pN \rceil \quad (7.3)$$

で定める． u_N^{SE} の未知係数を求めるために，この u_N^{SE} を方程式 (1.5) に代入し，次で定める選点

$$\check{t}_i^{\text{SE}} = \begin{cases} \psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih) & (i = -N, \dots, M) \\ b & (i = M+1) \end{cases} \quad (7.4)$$

で離散化して、連立 1 次方程式を立てる。ただし、方程式に含まれる積分は、 t に依存する変数変換 $s = \psi_{a,t}^{\text{SE}}(\sigma)$ ($s = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\sigma)$ ではないことに注意) によって

$$\begin{aligned} \int_a^t (t-s)^{p-1} k(t,s) u(s) ds &= \int_{-\infty}^{\infty} (t - \psi_{a,t}^{\text{SE}}(\sigma))^{p-1} k(t, \psi_{a,t}^{\text{SE}}(\sigma)) u(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(\sigma)) \{\psi_{a,t}^{\text{SE}}\}'(\sigma) d\sigma \\ &= (t-a)^p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k(t, \psi_{a,t}^{\text{SE}}(\sigma)) u(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(\sigma))}{(1+e^{-\sigma})(1+e^{\sigma})^p} d\sigma \end{aligned} \quad (7.5)$$

と変形した後に、Sinc 積分 (2.30) を適用して近似する。ただし、任意の $t \in [a, b]$ に対し $k(t, \cdot) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ と仮定する。簡便のために $f \in \mathbf{X}$ に対し次の作用素 $\mathcal{A}_{M,N}^{\text{Ri}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ を

$$\mathcal{A}_{M,N}^{\text{Ri}}[f](t) = (t-a)^p \check{h} \sum_{l=-M}^N \frac{k(t, \psi_{a,t}^{\text{SE}}(l\check{h})) f(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(l\check{h}))}{(1+e^{-l\check{h}})(1+e^{l\check{h}})^p} \quad (7.6)$$

で定義しておく (式 (7.1) とは M と N が逆転していることに注意)。ただし定理 2.19 に基づき、刻み幅 $\check{h}$ は

$$\check{h} = \sqrt{\frac{2\pi d}{pN}} \quad (7.7)$$

で、 M は式 (7.3) で定める。ここで $m = M + N + 2$ とおき、 m 次元ベクトル $\mathbf{g}_m^{\text{Ri}}$ と、 $m \times m$ 行列 $\check{E}_m^{\text{SE}}$ と $\check{A}_m^{\text{Ri}}$ をそれぞれ

$$\mathbf{g}_m^{\text{Ri}} = \begin{bmatrix} g(\check{t}_{-N}^{\text{SE}}) + g(0)(\mathcal{A}_{M,N}^{\text{Ri}}[1](\check{t}_{-N}^{\text{SE}}) - 1) \\ \vdots \\ g(\check{t}_M^{\text{SE}}) + g(0)(\mathcal{A}_{M,N}^{\text{Ri}}[1](\check{t}_M^{\text{SE}}) - 1) \\ g(b) + g(0)(\mathcal{A}_{M,N}^{\text{Ri}}[1](b) - 1) \end{bmatrix}, \quad (7.8)$$

$$\check{E}_m^{\text{SE}} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \omega_b(\check{t}_{-N}^{\text{SE}}) \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \omega_b(\check{t}_M^{\text{SE}}) \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (7.9)$$

$$\check{A}_m^{\text{Ri}} = \begin{bmatrix} \dots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{Ri}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot))](\check{t}_{-N}^{\text{SE}}) & \dots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{Ri}}[\omega_b](\check{t}_{-N}^{\text{SE}}) \\ & \vdots & & \vdots \\ \dots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{Ri}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot))](\check{t}_M^{\text{SE}}) & \dots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{Ri}}[\omega_b](\check{t}_M^{\text{SE}}) \\ \dots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{Ri}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot))](b) & \dots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{Ri}}[\omega_b](b) \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

で定めると、解くべき連立 1 次方程式は

$$(\lambda \check{E}_m^{\text{SE}} - \check{A}_m^{\text{Ri}}) \mathbf{u}_m = \mathbf{g}_m^{\text{Ri}} \quad (7.11)$$

と表せる。ただし $\mathbf{u}_m = [u_{-N}, \dots, u_M, u_{M+1}]^\top$ である。この連立 1 次方程式を解いて $\mathbf{u}_m$ を求めれば、式 (7.1) によって近似解 u_N^{SE} が求まる。

Riley はこのスキームに対して、次のような誤差解析を与えた。

定理 7.1 (Riley [118, Theorem 3.1]) 方程式 (1.5) の解 u は $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ であるとする。さらに関数 k は、任意の $t \in [a, b]$ に対し $k(t, \cdot) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ であるとする。このと

き、区間の幅 $b-a$ が十分小さく、かつ N が実用的な範囲内であれば、連立1次方程式 (7.11) には一意解が存在し、近似解 u_N^{SE} と、方程式 (1.5) の解 u との差は、 N によらない定数 C によって次のように評価できる：

$$\|u - u_N^{\text{SE}}\|_{\mathbf{X}} \leq C\sqrt{N} \log N e^{-\sqrt{\pi dp N}}. \quad (7.12)$$

注意 7.2 「 N が実用的な範囲内」という条件は不自然に感じるが、実際に原論文 [118] ではそう記述されている（原文は “ N in a practical range” である）。これに関する説明は §7.2.3 でも述べる。

7.1.2 Mori et al. による DE-Sinc 選点法とその誤差解析

次に、Mori et al. [78] により導出された、DE 変換を用いた Sinc 選点法 (DE-Sinc 選点法) を説明する。方程式 (1.5) の解 u は $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ をみたすとし、近似解 u_N^{DE} を未知係数 $u_{-N}, \dots, u_M, u_{M+1}$ を用いて

$$u_N^{\text{DE}}(t) = g(a) + \sum_{j=-N}^M u_j S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) + u_{M+1} \omega_b(t) \quad (7.13)$$

で設定する。ただし、刻み幅 h と M は、 N に対して

$$h = \frac{\log(2dN/p)}{M}, \quad (7.14)$$

$$M = N - \lceil \log(p)/h \rceil \quad (7.15)$$

で定める。 u_N^{DE} の未知係数を求めるために、この u_N^{DE} を方程式 (1.5) に代入し、次で定める選点

$$\check{t}_i^{\text{DE}} = \begin{cases} \psi_{a,b}^{\text{DE}}(ih) & (i = -N, \dots, M) \\ b & (i = M+1) \end{cases} \quad (7.16)$$

で離散化して、連立1次方程式を立てる。ただし方程式に含まれる積分は、 t に依存する変数変換 $s = \psi_{a,t}^{\text{DE}}(\sigma)$ によって

$$\begin{aligned} \int_a^t (t-s)^{p-1} k(t,s) u(s) ds &= \int_{-\infty}^{\infty} (t - \psi_{a,t}^{\text{DE}}(\sigma))^{p-1} k(t, \psi_{a,t}^{\text{DE}}(\sigma)) u(\psi_{a,t}^{\text{DE}}(\sigma)) \{\psi_{a,t}^{\text{DE}}\}'(\sigma) d\sigma \\ &= (t-a)^p \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k(t, \psi_{a,t}^{\text{DE}}(\sigma)) u(\psi_{a,t}^{\text{DE}}(\sigma)) \pi \cosh(\sigma)}{(1 + e^{-\pi \sinh(\sigma)})(1 + e^{\pi \sinh(\sigma)})^p} d\sigma \end{aligned} \quad (7.17)$$

と変形した後に、Sinc 積分 (2.30) を適用して近似する。ただし、任意の $t \in [a, b]$ に対し $k(t, \psi_{a,t}^{\text{DE}}(\cdot))$ は領域 $\mathcal{D}_{d(t)}$ 上正則かつ $\overline{\mathcal{D}_{d(t)}}$ 上連続とする。簡便のために $f \in \mathbf{X}$ に対し次の作用素 $\mathcal{A}_{M,N}^{\text{Mo}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ を

$$\mathcal{A}_{M,N}^{\text{Mo}}[f](t) = (t-a)^p \check{h} \sum_{l=-\check{M}}^N \frac{k(t, \psi_{a,t}^{\text{DE}}(l\check{h})) f(\psi_{a,t}^{\text{DE}}(l\check{h})) \pi \cosh(l\check{h})}{(1 + e^{-\pi \sinh(l\check{h})})(1 + e^{\pi \sinh(l\check{h})})^p} \quad (7.18)$$

で定義しておく．ただし $\check{h}$ と $\check{M}$ は

$$\check{h} = \frac{\log(4d(t)N/p)}{N}, \quad (7.19)$$

$$\check{M} = \lfloor N + \log(p)/\check{h} \rfloor + 1 \quad (7.20)$$

で定める．ここで， $\check{h}$ の決定式の中で，パラメータ d が $d(t)$ のように t に依存していることに注意．これは，式 (7.17) の最右辺の積分の被積分関数の正則領域が， $\mathcal{D}_{d(t)}$ のように t に依存することに起因する．このことは Riley の結果の場合にも言えることだが，この議論は次節に譲る．以上より， m 次元ベクトル $\mathbf{g}_m^{\text{Mo}}$ と， $m \times m$ 行列 $\check{E}_m^{\text{DE}}$ と $\check{A}_m^{\text{Mo}}$ をそれぞれ

$$\mathbf{g}_m^{\text{Mo}} = \begin{bmatrix} g(\check{t}_{-N}^{\text{DE}}) + g(0)(\mathcal{A}_{M,N}^{\text{Mo}}[1](\check{t}_{-N}^{\text{DE}}) - 1) \\ \vdots \\ g(\check{t}_M^{\text{DE}}) + g(0)(\mathcal{A}_{M,N}^{\text{Mo}}[1](\check{t}_M^{\text{DE}}) - 1) \\ g(b) + g(0)(\mathcal{A}_{M,N}^{\text{Mo}}[1](b) - 1) \end{bmatrix}, \quad (7.21)$$

$$\check{E}_m^{\text{DE}} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \omega_b(\check{t}_{-N}^{\text{DE}}) \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \omega_b(\check{t}_M^{\text{DE}}) \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array} \right], \quad (7.22)$$

$$\check{A}_m^{\text{Mo}} = \begin{bmatrix} \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{Mo}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot))](\check{t}_{-N}^{\text{DE}}) & \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{Mo}}[\omega_b](\check{t}_{-N}^{\text{DE}}) \\ & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{Mo}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot))](\check{t}_M^{\text{DE}}) & \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{Mo}}[\omega_b](\check{t}_M^{\text{DE}}) \\ \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{Mo}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot))](b) & \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{Mo}}[\omega_b](b) \end{bmatrix} \quad (7.23)$$

で定めると，解くべき連立 1 次方程式は

$$(\lambda \check{E}_m^{\text{DE}} - \check{A}_m^{\text{Mo}}) \mathbf{u}_m = \mathbf{g}_m^{\text{Mo}} \quad (7.24)$$

と表せる．ただし $\mathbf{u}_m = [u_{-N}, \dots, u_M, u_{M+1}]^\top$ である．この連立 1 次方程式を解いて $\mathbf{u}_m$ を求めれば，式 (7.13) によって近似解 u_N^{DE} が求まる．

このスキームに対して，Mori et al. は定理の形で述べてはいないものの，本質的に次のような誤差解析結果を導いている．

定理 7.3 (Mori et al. [78]) 方程式 (1.5) の解 u は $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ であるとする．関数 $k(t, \psi_{a,t}^{\text{DE}}(\cdot))$ は，任意の $t \in [a, b]$ をみたす t に対し領域 $\mathcal{D}_{d(t)}$ 上正則かつ $\overline{\mathcal{D}_{d(t)}}$ 上連続とし，かつ $d \leq 2d(t)$ とする．このとき，連立 1 次方程式 (7.24) を解いて求めた近似解 u_N^{DE} と，方程式 (1.5) の解 u との差は， N によらない定数 C によって次のように評価できる：

$$\|u - u_N^{\text{DE}}\|_{\mathbf{x}} \leq C \|(\lambda \check{E}_m^{\text{DE}} - \check{A}_m^{\text{Mo}})^{-1}\|_{\infty} \log N \exp \left\{ \frac{-\pi d N}{\log(2dN/p)} \right\}. \quad (7.25)$$

7.2 Riley/Mori et al. の結果に関する議論と改良のアイデア

上述した Riley/Mori et al. による結果には、実装上、および理論解析の観点から、改良の余地がある。本節ではそれらをまとめた上、次節で与える改良方法のアイデアを示す。

7.2.1 近似の際に関数に対して課す仮定について（スキームの導出に関連）

解 u の近似に対して

Riley は、解 u を近似する際に、 $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ と仮定しているが、実はこの仮定は不十分である。Riley は、 $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ であれば、式 (2.73) と同様に $\hat{u}$ を

$$\hat{u}(t) = u(t) - \{u(a)\omega_a(t) + u(b)\omega_b(t)\} \quad (7.26)$$

とおくと、この $\hat{u}$ はある定数 C によって

$$|\hat{u}(t)| \leq \begin{cases} C(t-a)^p & (a < t \leq (b+a)/2) \\ C(b-t) & ((b+a)/2 < t < b) \end{cases} \quad (7.27)$$

と評価できるとして、 $f = \hat{u}$ として定理 2.18 を適用している。しかしこれは成り立たない場合がある。例えば $a = 0, b = 1$ として、

$$u(t) + \int_0^t \frac{u(s)}{\sqrt{t-s}} ds = \sqrt{t} + \sqrt{1-t} + (1-t) \log\{(1+\sqrt{t})/\sqrt{1-t}\}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (7.28)$$

という方程式を考えると、解は $u(t) = \sqrt{1-t}$ であり、ある ϵ を用いて $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi-\epsilon}))$ である。ところが、 $\hat{u}(t) = \sqrt{1-t}(1 - \sqrt{1-t})$ となり、この $\hat{u}$ はいかなる C を用いても式 (7.27) の下側のようには評価できない。また、たとえ式 (7.27) が成り立つとしても、これは実軸上のみの制限であるため、 $\hat{u} \in \mathbf{L}_{p,1}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ は成り立たず、定理 2.18 は適用できない^{*1}。実際には $u \in \mathbf{M}_{p,1}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ の仮定が必要であり、本論文では $u \in \mathbf{M}_{p,1}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ と仮定してスキームを導出する。この点に関しては Mori et al. の結果に対しても同様のことが言え、本論文では $u \in \mathbf{M}_{p,1}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ と仮定する。

積分の近似に対して

さらに、Riley の結果では、積分の近似において、積分区間が (a, t) と t によって変化することを考慮していないという問題がある。Riley は、積分近似の誤差解析の根拠として定理 2.19 を用いているが、積分区間が (a, b) でなく (a, t) と t によって変化するため、定理 2.19 における仮定は t に依存することになる。Riley はこの点を無視して近似を行っている。

^{*1} 実軸上のみの制限を用いた誤差評価も存在し [148]、次章で説明する岡山 [89] の結果で用いられているが、その場合は収束速度が少し遅く評価される。

このことを、例を通じて見てみる． $a = -1, b = 1$ として、関数 $f(s) = \sqrt{1+s^2}$ とおき、

$$\int_a^t f(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(\sigma)) \psi_{a,t}^{\text{SE}}(\sigma) d\sigma \approx h \sum_{j=-N}^N f(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{a,t}^{\text{SE}}\}'(jh) \quad (7.29)$$

と $t \in [a, b]$ の範囲で近似する場合を考える．関数 $f(z)$ は $z = \pm i$ で非正則であるので、この特異点が d の値を決定するはずである．簡単のために、

$$F_t(\zeta) = f(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(\zeta)) = \sqrt{1 + \{\psi_{a,t}^{\text{SE}}(\zeta)\}^2} \quad (7.30)$$

とおけば、この関数 F_t の正則領域 ($\mathcal{D}_d$ の幅) を調べれば d の値が求まる．この関数 F_t は、例えば $t = 0$ の場合は $\zeta = \log \sqrt{2} \pm i(3\pi/4)$ に特異点を持つので、 $d = 3\pi/4$ であることがわかる．また $t = 1$ の場合は $\zeta = \pm i(\pi/2)$ に特異点を持つので、このときは $d = \pi/2$ である．このように、そもそもの関数 $f(z)$ の特異点は $z = \pm i$ であるが、関数 $F_t(\zeta)$ の特異点は $z = \pm i$ を逆写像した点 $\zeta = \{\psi_{a,t}^{\text{SE}}\}^{-1}(z)$ であり、 t に依存して動く．そのため一般に t によって正則領域の幅 d の値は異なり、実際には t に依存する関数 $d(t)$ となることに注意が必要である．Riley はこの t に対する依存性を無視している．

このことは誤差評価だけでなく、実はスキーム自体においても、刻み幅 $\check{h}$ を定める際に問題となる．被積分関数の正則領域のパラメータ d は、計算に用いる刻み幅 $\check{h}$ の決定式 (7.7) で用いられていることに注意．そのため、本来ならば $\check{h}$ は t に依存して動かさねばならない．実際、Mori et al. はそのことを考慮し、式 (7.19) で $\check{h}$ は t に依存することを述べている．

ただし、数学的には正しくても、実際にプログラムを組んでスキームを走らせる際、 t が変化する度に被積分関数の正則領域を調べて $d(t)$ を求める、という設定は現実的ではなく、Riley のように d は固定する方が望ましい．もし、 t に対し最も狭くなる正則領域がわかれば、すなわち $d \leq d(t)$ となる最小の d が事前に求まれば、その d を用いて $\check{h}$ を式 (7.7) で定めることは可能である．上の例で言えば、 $d(t) = |\text{Im} \zeta| = |\text{Im} \{\psi_{a,t}^{\text{SE}}\}^{-1}(z)|$ であるから、 $|\text{Im} \{\psi_{a,t}^{\text{SE}}\}^{-1}(z)|$ の最小値を求めればよい．それは次の結果より求められる．

補題 7.4 (岡山 [89, 補題 4.4]) t は区間 $[a, b]$ 上の実数、 z を区間 $[a, b]$ 上にない複素数とし、 $\zeta(t) = \{\psi_{a,t}^{\text{SE}}\}^{-1}(z)$ とおく．このとき、 $|\text{Im} \zeta(t)|$ は t に関して単調減少である．

補題 7.5 (岡山 [89, 補題 4.13]) t は区間 $[a, b]$ 上の実数、 z を区間 $[a, b]$ 上にない複素数とし、 $\zeta(t) = \{\psi_{a,t}^{\text{DE}}\}^{-1}(z)$ とおく．このとき、 $|\text{Im} \zeta(t)|$ は t に関して単調減少である．

注意 7.6 この補題自体は正しいが、実は DE 変換の場合は少し注意が必要である．DE 変換の場合は、 $z = b$ のとき、つまり端点 b に特異性があつたとすると、 $d(t)$ の最小値が 0 になる ($|\text{Im} \zeta(b)| = 0$) ので、この場合 $d > 0$ となる正則領域 $\mathcal{D}_d$ がとれない．そのようなことが起こらないよう、DE 変換の場合は、端点 b での正則性も仮定する必要がある (岡山 [89] はこの点を議論していない)．SE 変換の場合はその必要はないが、並列性の観点から、本章ではいずれの場合でも端点 b での正則性を仮定する．

これらの結果より、 $t = b$ のときに $|\text{Im} \{\psi_{a,t}^{\text{SE}}\}^{-1}(z)|$ や $|\text{Im} \{\psi_{a,t}^{\text{DE}}\}^{-1}(z)|$ が最小値をとるこ

とがわかる．そこで本論文では， d はこの最小の値で固定し，スキームを導出する．

さらに本論文では，刻み幅の決定式を，関数近似と積分近似で統一する．Riley と Mori et al. は，それぞれ h と $\check{h}$ で異なった定め方をしていたが，前章までで見たように，刻み幅を関数近似の方に統一すれば，誤差の減少のオーダーは変化しない上に，実装が簡易になるという利点がある．この修正したスキームを §7.3.2 で示す．

7.2.2 積分方程式の解が属する関数空間について（論点 1 に関連）

Riley と Mori et al. は，積分方程式の解が $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ や $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ をみたすと仮定し，この正則領域 $\mathcal{D}_d$ のパラメータ d を用いて，刻み幅 h を式 (7.2) や式 (7.14) で定めている．ところが，前章までの議論と同様，解 u は未知関数であるため，ユーザーは事前にこのパラメータ d を知ることは困難である．それに対し本論文では， $u \in \mathbf{M}_{p,1}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ や $u \in \mathbf{M}_{p,1}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ となる条件を，方程式に含まれる既知関数 $k(t, s)$, $g(t)$ に関する条件として与える．このことを §7.3.1 で示す．

7.2.3 収束定理について（論点 2 に関連）

Riley は定理 7.1 において，区間の長さ $b - a$ は十分小さく，かつ N は実用的な範囲である（これは N は十分大きくできないことを意味する）としている．これらは非常に不自然な仮定である．いかなる区間の長さであっても数値計算は行えるべきで，また N を大きくできないと $N \rightarrow \infty$ で u_N^{SE} が u に収束することが保証されない．これらの仮定は，連立 1 次方程式 (7.11) の係数行列 $\lambda E_m^{\text{SE}} - \check{A}_m^{\text{RI}}$ の逆行列の存在性と有界性を示すために用いられているものである．

Mori et al. はこの問題を認識しており，定理 7.3 では不自然な仮定はなされず， $\lambda E_m^{\text{DE}} - \check{A}_m^{\text{MO}}$ の逆行列の存在性と有界性の方を（暗黙に）仮定している．ただし，やはり N に依存するはずの項 $\|(\lambda E_m^{\text{DE}} - \check{A}_m^{\text{MO}})^{-1}\|_\infty$ は評価されていないので，収束を示しているとは言い難い．

本論文では，修正した SE-Sinc 選点法に対して，区間の長さ $b - a$ と N の大きさの制限に関する仮定を外した上で， N が十分大きくなるときには連立 1 次方程式の係数行列が有界な逆行列を持つことを示す．また修正した DE-Sinc 選点法に対しても，ある予想の下に，同様のことが成り立つことを示す．

7.3 主結果：Sinc 選点法の改良とその理論解析

7.3.1 解 u の性質の解析

本論文では，方程式 (1.5) の解 u が，一般化 Sinc 関数近似に適した空間 $\mathbf{M}_{p,1}(\mathfrak{D})$ に属する条件について，次のような結果を得た．証明は第 7.5 節で与える．

定理 7.7 b' は $b < b'$ をみたす定数とし， $\mathfrak{D}'$ を $\mathfrak{D}' = \psi_{a,b'}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ または $\mathfrak{D}' = \psi_{a,b'}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ とおく．関数 k は，任意の $z, w \in \overline{\mathfrak{D}}$ に対し $k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D}) \cap \mathbf{HC}(\mathfrak{D}')$ かつ $k(z, \cdot) \in$

$\mathbf{HC}(\mathfrak{D}) \cap \mathbf{HC}(\mathfrak{D}')$ をみたすとし、関数 g は、 $g \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathfrak{D}) \cap \mathbf{HC}(\mathfrak{D}')$ をみたすとする。このとき、方程式 (1.5) には唯一解 $u \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathfrak{D})$ が存在する。

この定理は、既知関数 g と k を調べることで、未知関数 u のパラメータ d が求まることを示している。

7.3.2 修正した Sinc 選点法とその誤差解析

修正 SE-Sinc 選点法とその誤差解析

ここでは、本論文で修正を行った SE-Sinc 選点法の実体形を示し、その誤差解析結果を述べる。繰り返しになるが、主な修正点は u に仮定する条件と、積分近似の際の刻み幅の決定法 (t に依存せず、関数近似と同じ決定式を用いる) である。

解 u は $u \in \mathbf{M}_{p,1}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ であるとし、近似解 u_N^{SE} を式 (7.1) のようにおく。刻み幅 h と M はそれぞれ式 (7.2) と式 (7.3) で定める。この u_N^{SE} を方程式 (1.5) に代入し、式 (7.4) で定めた選点 $t = \check{t}_i^{\text{SE}}$ 上で離散化する。ただし方程式中の積分は、Riley と同様に、任意の $t \in [a, b]$ に対し $k(t, \cdot) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ と仮定し、変数変換 $s = \psi_{a,t}^{\text{SE}}(\sigma)$ と Sinc 積分 (2.30) を適用して近似する。ただし、刻み幅は異なる。 $f \in \mathbf{X}$ に対し次の作用素 $\mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ を

$$\mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}[f](t) = (t-a)^p h \sum_{l=-M}^N \frac{k(t, \psi_{a,t}^{\text{SE}}(lh)) f(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(lh))}{(1+e^{-lh})(1+e^{lh})^p} \quad (7.31)$$

で定義し、刻み幅 h は式 (7.2) で定める。 m 次元ベクトル $\check{\mathbf{g}}_m^{\text{SE}}$ と、 $m \times m$ 行列 $\check{\mathbf{A}}_m^{\text{SE}}$ をそれぞれ

$$\check{\mathbf{g}}_m^{\text{SE}} = \begin{bmatrix} g(\check{t}_{-N}^{\text{SE}}) + g(0)(\mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}[1](\check{t}_{-N}^{\text{SE}}) - 1) \\ \vdots \\ g(\check{t}_M^{\text{SE}}) + g(0)(\mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}[1](\check{t}_M^{\text{SE}}) - 1) \\ g(b) + g(0)(\mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}[1](b) - 1) \end{bmatrix}, \quad (7.32)$$

$$\check{\mathbf{A}}_m^{\text{SE}} = \begin{bmatrix} \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot))](\check{t}_{-N}^{\text{SE}}) & \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}[\omega_b](\check{t}_{-N}^{\text{SE}}) \\ & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot))](\check{t}_M^{\text{SE}}) & \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}[\omega_b](\check{t}_M^{\text{SE}}) \\ \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot))](b) & \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}[\omega_b](b) \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

で定め、 $\check{E}_m^{\text{SE}}$ を式 (7.9) で定めると、解くべき連立 1 次方程式は

$$(\lambda \check{E}_m^{\text{SE}} - \check{\mathbf{A}}_m^{\text{SE}}) \mathbf{u}_m = \check{\mathbf{g}}_m^{\text{SE}} \quad (7.34)$$

と表せる。この連立 1 次方程式を解いて $\mathbf{u}_m$ を求めれば、式 (7.1) によって近似解 u_N^{SE} が求まる。

本論文ではここに示したスキームに対し、次の誤差解析結果を得た。証明は §7.6.1 で与える。

定理 7.8 定理 7.7 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ かつ $\mathfrak{D}' = \psi_{a,b'}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする。このときある自然数 N_0 が存在して、 $N \geq N_0$ をみたす任意の自然数 N に対し、連立 1 次方程式 (7.34) は一意可解で、近似誤差は N によらないある定数 C によって、次のように評価できる：

$$\|u - u_N^{\text{SE}}\|_{\mathbf{X}} \leq C\sqrt{N}e^{-\sqrt{\pi d\mu N}}. \quad (7.35)$$

修正 DE-Sinc 選点法とその誤差解析

次に、本論文で修正を行った DE-Sinc 選点法の実体形を示し、その誤差解析結果を述べる。繰り返しになるが、やはり主な修正点は u に仮定する条件と、積分近似の際の刻み幅の決定法 (t に依存せず、関数近似と同じ決定式を用いる) である。

解 u は $u \in \mathbf{M}_{p,1}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ であるとし、近似解 u_N^{DE} を式 (7.13) のようにおく。刻み幅 h と M はそれぞれ式 (7.14) と式 (7.15) で定める。この u_N^{DE} を方程式 (1.5) に代入し、式 (7.16) で定めた選点 $t = \check{t}_i^{\text{DE}}$ 上で離散化する。ただし方程式中の積分は、Riley と同様に、任意の $t \in [a, b]$ に対し $k(t, \cdot) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ と仮定し、変数変換 $s = \psi_{a,t}^{\text{DE}}(\sigma)$ と Sinc 積分 (2.30) を適用して近似する。ただし、刻み幅は異なる。 $f \in \mathbf{X}$ に対し次の作用素 $\mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ を

$$\mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}[f](t) = (t-a)^ph \sum_{l=-M}^N \frac{k(t, \psi_{a,t}^{\text{DE}}(lh))f(\psi_{a,t}^{\text{DE}}(lh))\pi \cosh(lh)}{(1 + e^{-\pi \sinh(lh)})(1 + e^{\pi \sinh(lh)})^p} \quad (7.36)$$

で定義し、刻み幅 h は式 (7.14) で定める。 m 次元ベクトル $\check{\mathbf{g}}_m^{\text{DE}}$ と、 $m \times m$ 行列 $\check{\mathbf{A}}_m^{\text{DE}}$ をそれぞれ

$$\check{\mathbf{g}}_m^{\text{DE}} = \begin{bmatrix} g(\check{t}_{-N}^{\text{DE}}) + g(0)(\mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}[1](\check{t}_{-N}^{\text{DE}}) - 1) \\ \vdots \\ g(\check{t}_M^{\text{DE}}) + g(0)(\mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}[1](\check{t}_M^{\text{DE}}) - 1) \\ g(b) + g(0)(\mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}[1](b) - 1) \end{bmatrix}, \quad (7.37)$$

$$\check{\mathbf{A}}_m^{\text{DE}} = \begin{bmatrix} \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot))](\check{t}_{-N}^{\text{DE}}) & \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}[\omega_b](\check{t}_{-N}^{\text{DE}}) \\ & \vdots & & \vdots \\ \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot))](\check{t}_M^{\text{DE}}) & \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}[\omega_b](\check{t}_M^{\text{DE}}) \\ \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot))](b) & \cdots & \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}[\omega_b](b) \end{bmatrix} \quad (7.38)$$

で定め、 $\check{E}_m^{\text{DE}}$ を式 (7.22) で定めると、解くべき連立 1 次方程式は

$$(\lambda \check{E}_m^{\text{DE}} - \check{\mathbf{A}}_m^{\text{DE}})\mathbf{u}_m = \check{\mathbf{g}}_m^{\text{DE}} \quad (7.39)$$

と表せる。この連立 1 次方程式を解いて $\mathbf{u}_m$ を求めれば、式 (7.13) によって近似解 u_N^{DE} が求まる。

ここに示したスキームの誤差解析結果は次のようになる。証明は §7.6.2 で与える。

定理 7.9 定理 7.7 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ かつ $\mathfrak{D}' = \psi_{a,b'}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする。このときある自然数 N_0 が存在して、 $N \geq N_0$ をみたす任意の自然数 N に対し、連立 1

次方程式 (7.39) は一意可解で、近似誤差は N によらないある定数 C によって、次のように評価できる：

$$\|u - u_N^{\text{DE}}\|_{\mathbf{X}} \leq C \log^2(N+1) e^{-\pi d N / \log(2dN/p)}. \quad (7.40)$$

7.4 数値実験

本節では数値実験結果を示す。実験の目的は、Riley [118] および Mori et al. [78] によるスキームと、本論文で導出した修正 SE-Sinc 選点法、修正 DE-Sinc 選点法との性能比較を行うこと、そして収束速度の確認である。実装言語は C++ で、浮動小数点数には double 型を用いた。連立 1 次方程式を解くにあたっては LU 分解を用いた。また、区間は全て $[a, b] = [0, 1]$ である。

7.4.1 解が端点特異性をもつ方程式の場合

まず、Riley [118] および Mori et al. [78] がとりあげている次の方程式を考える。

例 7.10 次の弱特異核をもつ第二種 Volterra 積分方程式 [1, 30, 35, 51, 117, 118]

$$u(t) + \int_0^t \frac{u(s)}{\sqrt{t-s}} ds = \sqrt{t} + \frac{\pi t}{2}, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (7.41)$$

を考える。方程式の解は $u(t) = \sqrt{t}$ である。

π より少し小さい数として $\pi_m = 3.14$ とおくと、定理 7.7 を用いれば、既知関数 g, k を調べることで $u \in \mathbf{M}_{1/2,1}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi_m}))$ かつ $u \in \mathbf{M}_{1/2,1}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi_m/2}))$ であることがわかる。そこで修正 SE-Sinc 選点法では $d = \pi_m$ として刻み幅 h を式 (7.2) で定めた。修正 DE-Sinc 選点法では、 $d = \pi_m/2$ として刻み幅 h を式 (7.14) で定めた。それに対し Riley [118] は、 $d = \pi/2$ として刻み幅 h を式 (7.2) で、刻み幅 $\check{h}$ を式 (7.7) で定めているので、ここでも同じ定め方をして実験を行った。また Mori et al. [78] は、 $d = \pi/2$ として刻み幅 h を式 (7.14) で、 $d(t) = \pi/2$ として刻み幅 $\check{h}$ を式 (7.19) で定めているので、ここでも同じ定め方をして実験を行った。これらの結果を図 7.1 に示す。ただし図中 E_{1001} は、 $t_i = a + (b-a)i/1000$ として式 (6.15) で定義される、等間隔点上における最大誤差である。図 7.1 より、修正 SE-Sinc 選点法は元々の Riley の SE-Sinc 選点法よりも収束が速いことがわかる。これは、Riley は $d = \pi/2$ と最適な値で定めていないのに対し、本論文では定理 7.7 を用いることで、 $d = \pi_m$ と最適な値で定められていることがその理由である。また、修正 DE-Sinc 選点法は、元々の Mori et al. の DE-Sinc 選点法と同等の収束性を示している。ただし、Mori et al. の DE-Sinc 選点法では、数値積分で用いる $\check{h}$ と $\check{M}$ を近似解 u_N^{DE} で用いる h と M とは異なって定めなければならないのに対し、修正 DE-Sinc 選点法では両者を h と M で統一しているため、修正 DE-Sinc 選点法の方が実装が簡単であるという利点がある。これは Riley の SE-Sinc 選点法と本論文の修正 SE-Sinc 選点法についても言える違いである。さらに、修正 SE-Sinc 選点法

と修正 DE-Sinc 選点法はそれぞれ定理 7.8 と定理 7.9 で収束性が保証されており, 実際に図 7.1 からその収束性が観察できる.

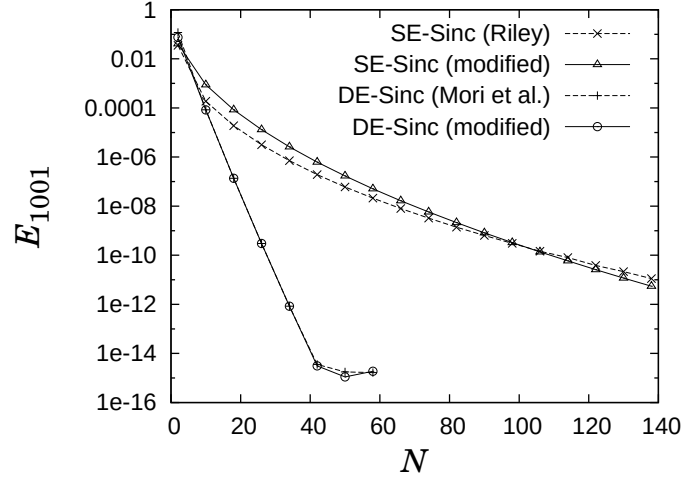


図 7.1 方程式 (7.41) に対する Riley [118] の SE-Sinc 選点法, 本論文の修正 SE-Sinc 選点法, Mori et al. [78] の DE-Sinc 選点法, 本論文の修正 DE-Sinc 選点法の誤差の減少の様子.

7.4.2 解が端点特異性をもたない方程式の場合

次に, 解が端点特異性をもたない場合を考える.

例 7.11 次の弱特異核をもつ第二種 Volterra 積分方程式 [20, 30, 41, 63, 101]

$$u(t) + \frac{1}{4} \int_0^t \frac{u(s)}{\sqrt{t-s}} ds = \frac{1}{\sqrt{1+t}} + \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \arcsin\left(\frac{1-t}{1+t}\right), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (7.42)$$

を考える. 方程式の解は $u(t) = 1/\sqrt{1+t}$ である.

今回においても定理 7.7 を用いれば, 既知関数 g, k を調べることで $u \in \mathbf{M}_{1/2,1}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi_m}))$ であることがわかる. また DE 変換の場合においては,

$$r = \frac{2\pi}{\log 2}, \quad (7.43)$$

$$x = -\frac{2}{r} \left[1 - \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1+r^2}}{2}} \right], \quad (7.44)$$

$$y = 1 - \sqrt{\frac{2}{1 + \sqrt{1+r^2}}} \quad (7.45)$$

と定めて, $d_m = \arcsin(y/\sqrt{x^2+y^2}) - \epsilon$ (ϵ は小さな正の値) とおくと, 定理 7.7 より $u \in \mathbf{M}_{1/2,1}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{d_m}))$ であることがわかる. そこで修正 SE-Sinc 選点法では $d = \pi_m$ として

刻み幅 h を式 (7.2) で定めた．修正 DE-Sinc 選点法では， $d = d_m$ として刻み幅 h を式 (7.2) で定めた．それに対し Riley [118] の SE-Sinc 選点法および Mori et al. [78] の DE-Sinc 選点法では，パラメータの定め方が与えられていないため，今回はそれぞれ修正 SE-Sinc 選点法および修正 DE-Sinc 選点法と同じパラメータで実験を行った．これらの結果を図 7.2 に示す．修正 SE-Sinc 選点法は元々の Riley の SE-Sinc 選点法と同等の収束性が，修正 DE-Sinc 選点法は元々の Mori et al. の DE-Sinc 選点法と同等の収束性が観察できる．ただし，本論文で修正したスキームは元々のスキームに比べて数値積分における刻み幅 $\check{h}$ や和の下端 $\check{M}$ を別途定める必要がなく，実装が簡単であるという利点と，定理 7.8 および定理 7.9 で収束性が保証されているという利点がある．実際にこの収束性は図 7.2 から読み取ることができる．

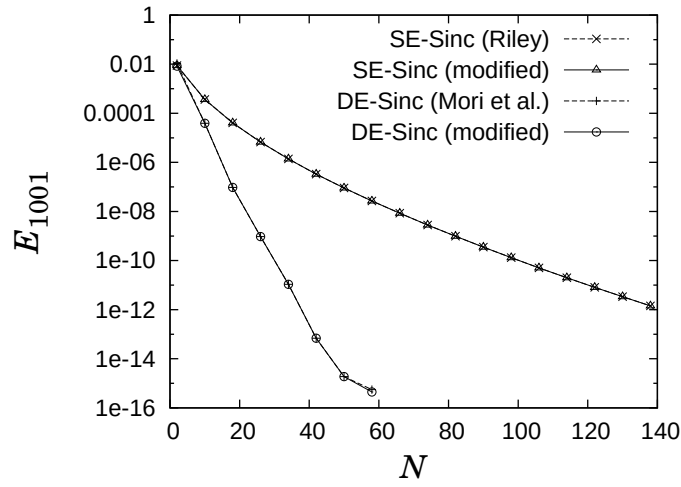


図 7.2 方程式 (7.42) に対する Riley [118] の SE-Sinc 選点法，本論文の修正 SE-Sinc 選点法，Mori et al. [78] の DE-Sinc 選点法，本論文の修正 DE-Sinc 選点法の誤差の減少の様子．

7.5 証明：解 u の性質の解析

ここでは，定理 7.7 の証明を行う．まず， $f \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ に対して積分作用素 $\mathcal{A} : \mathbf{HC}(\mathfrak{D}) \rightarrow \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ を

$$\mathcal{A}[f](z) = \int_a^z (z-w)^{p-1} k(z, w) f(w) dw \quad (7.46)$$

で定義すると，ある n_0 が存在して，任意の $n \geq n_0$ で $\mathcal{A}^n$ は縮小写像となる．これは次の補題よりわかる．証明は本節の最後に与える．

補題 7.12 任意の $z, w \in \overline{\mathfrak{D}}$ に対し $k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ かつ $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ とし，さらに $f \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ とする．このとき， M_k を式 (3.29) で定めると，任意の $z \in \overline{\mathfrak{D}}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対し

て次のような評価が成り立つ：

$$|\mathcal{A}^n[f](z)| \leq \frac{[M_k \Gamma(p) c_d |z - a|^p]^n}{\Gamma(np + 1)} \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})}. \quad (7.47)$$

ただし c_d は d のみに依存する定数である ($\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathscr{D}_d)$ or $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathscr{D}_d)$ に注意).

このことから、縮小写像の原理を用いると、まず $u \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ となる条件に対して次のことがわかる.

定理 7.13 任意の $z, w \in \overline{\mathfrak{D}}$ に対し, $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ かつ $k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ とし, また $g \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ とする. このとき, 作用素 $(\mathcal{I} - \mathcal{A}) : \mathbf{HC}(\mathfrak{D}) \rightarrow \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ は有界な逆作用素 $(\mathcal{I} - \mathcal{A})^{-1} : \mathbf{HC}(\mathfrak{D}) \rightarrow \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ を持ち, 方程式 (1.5) には唯一解 $u \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ が存在する.

次に, さらに端点の Hölder 連続性が課された, $u \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathfrak{D})$ となる条件を考える. ただし, k や g に対し, 単に $\mathfrak{D}$ の領域に対してだけの正則性や連続性などの条件を仮定した場合は, 一般には $u \in \mathbf{M}_{p,p}(\mathfrak{D})$ となる. 実際, 方程式 (7.28) がこの例となっている. ただしこれは非常に人工的な例であり, 通常は端点 b よりも右側を含めて正則となっていることが多いと考えられる. 端点 b で正則ならば, 明らかに点 b で Lipschitz 連続であるので, $u \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathfrak{D})$ を示すことができると期待される. よって, $\mathfrak{D}$ よりも広く, 端点 b を含んだ領域で考えることにする.

ここで用いられるのが, 変数変換で写される領域 $\mathfrak{D}$ に関する次の二つの補題である. 証明は補題 7.4 と 7.5 より明らかであるので省略する.

補題 7.14 $a < t < t'$ ならば, $\psi_{a,t}^{\text{SE}}(\mathscr{D}_d) \subset \psi_{a,t'}^{\text{SE}}(\mathscr{D}_d)$ が成り立つ.

補題 7.15 $a < t < t'$ ならば, $\psi_{a,t}^{\text{DE}}(\mathscr{D}_d) \subset \psi_{a,t'}^{\text{DE}}(\mathscr{D}_d) \cup \{t'\}$ が成り立つ.

注意 7.16 ここで, 補題 7.15 では, $\psi_{a,t'}^{\text{DE}}(\mathscr{D}_d)$ ではなく $\psi_{a,t'}^{\text{DE}}(\mathscr{D}_d) \cup \{t'\}$ のように, 点 $\{t'\}$ も含めた領域を考えているが, これは注意 7.6 で述べたことに起因する.

例えば b' を $b < b'$ をみたす定数としたとき, $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathscr{D}_d)$, $\mathfrak{D}' = \psi_{a,b'}^{\text{SE}}(\mathscr{D}_d)$ とすると, 補題 7.14 より, $u \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D}')$ ならば明らかに $u \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ である. さらに端点 b は領域 $\mathfrak{D}'$ の内部にあるので, u は端点 b でも正則である. DE 変換の場合は, $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathscr{D}_d)$, $\mathfrak{D}' = \psi_{a,b'}^{\text{DE}}(\mathscr{D}_d)$ とすると, $u \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D}')$ ならばやはり端点 b でも u は正則であるが, 補題 7.15 を見てわかる通り, それだけでは $u \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ とは限らない. そこで, (SE 変換の場合は冗長となるが) $u \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D}) \cap \mathbf{HC}(\mathfrak{D}')$ となるように仮定を置くことにする.

以上の準備により, 定理 7.7 は次のように示される.

証明. 定理 7.13 より, まず $u \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D}) \cap \mathbf{HC}(\mathfrak{D}')$ であることがわかる. 点 b は領域 $\mathfrak{D}'$ の内部にあるので, u は端点 b で正則である. よって u は端点 b で Lipschitz 連続であり, ある定数 H が存在して

$$|u(b) - u(z)| \leq H|b - z|^1 \quad (7.48)$$

が成り立つ。さらに仮定 $g \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathfrak{D})$ と、補題 7.12 の結果を $n = 1$ で用いると、ある定数 H_g が存在して

$$|u(z) - u(a)| \leq |g(z) - g(a)| + |\mathcal{A}[u](z) - \mathcal{A}[u](a)| \leq \left\{ H_g + \frac{M_k c_d \|u\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})}}{p} \right\} |z - a|^p \quad (7.49)$$

が成り立つ。よって $u \in \mathbf{M}_{p,1}(\mathfrak{D})$ である。 ■

以下では補題 7.12 を、SE 変換の場合と DE 変換の場合に分けて証明する。まず、SE 変換を用いた場合について示すが、補題を一つ用意しておく。

補題 7.17 (Okayama et al. [100, Lemma A.1]) d を $0 < d < \pi$ をみたす定数、 x を任意の実数とする。このとき、式 (3.31) で関数 ψ_1 を定めると、 $|y| \leq d$ をみたす任意の実数 y に対し、

$$|\psi_{0,1}^{\text{SE}}(x + iy)| \geq \psi_1(x) \quad (7.50)$$

が成り立つ。さらに、 $x \geq t$ ならば、

$$|\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x + iy) - \psi_{a,b}^{\text{SE}}(t + iy)| \geq (b - a)\{\psi_1(x) - \psi_1(t)\} \quad (7.51)$$

が成り立つ。

証明. 式 (7.50) は

$$|\psi_{0,1}^{\text{SE}}(x + iy)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2e^{-x} \cos y + e^{-2x}}} \geq \frac{1}{\sqrt{1 + 2e^{-x} + e^{-2x}}} = \psi_1(x) \quad (7.52)$$

と直ちに示せる。次に式 (7.51) を示す。任意の $r \in \mathbb{R}$ に対して

$$|\cosh(r + iy)| = \sqrt{\cosh^2(r) - \sin^2(y)} \leq \cosh(r) \quad (7.53)$$

が成り立つことより、

$$\begin{aligned} |\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x + iy) - \psi_{a,b}^{\text{SE}}(t + iy)| &= (b - a) \left| \frac{\cosh(x)}{\cosh(x + iy)} \frac{\cosh(t)}{\cosh(t + iy)} \right| \{\psi_1(x) - \psi_1(t)\} \\ &\geq (b - a)\{\psi_1(x) - \psi_1(t)\} \end{aligned} \quad (7.54)$$

と評価できるので、補題は示された。 ■

この補題 7.17 の不等式 (7.51) を用いると、

$$(b - a)\psi_1(x) \leq (b - a)|\psi_{0,1}^{\text{SE}}(x + iy)| = |\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x + iy) - a| = |z - a| \quad (7.55)$$

と評価できるので、補題 7.12 を示すには次の補題を示せば十分である。

補題 7.18 $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ とおく。任意の $z, w \in \overline{\mathfrak{D}}$ に対し $k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ かつ $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ とし、さらに $f \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ とする。このとき、関数 ψ_1 を式 (3.31) で定め、 M_k を式 (3.29) で定めると、任意の $z \in \overline{\mathfrak{D}}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して次のような評価が成り立つ：

$$|\mathcal{A}^n[f](z)| \leq \frac{[M_k \Gamma(p) c_1 \{(b - a)\psi_1(x)\}^p]^n}{\Gamma(np + 1)} \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})}. \quad (7.56)$$

ただし $x = \text{Re}[\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(z)]$ であり、 c_1 は d のみに依存する正の定数である。

証明. 実数 y を $y = \text{Im}[\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(z)]$ とおく. まず $n = 1$ について考えると, 変数変換 $w = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(t + iy)$ を適用することで

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[f](z) - \mathcal{A}[f](a) &= \int_a^z \frac{k(z, w)f(w)}{(z - w)^{1-p}} dw - 0 \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{k(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x + iy), \psi_{a,b}^{\text{SE}}(t + iy))f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(t + iy))}{(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x + iy) - \psi_{a,b}^{\text{SE}}(t + iy))^{1-p}} \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(t + iy) dt \end{aligned} \quad (7.57)$$

と変形できる. ここで, 補題 3.9 と, 補題 7.17 の不等式 (7.51) を用いると,

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}[f](z) - \mathcal{A}[f](a)| &\leq \int_{-\infty}^x \frac{M_k \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})}}{[(b-a)\{\psi_1(x) - \psi_1(t)\}]^{1-p}} (b-a)c_1 \psi_1'(t) dt \\ &= M_k \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} c_1 \int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial t} \left[-\frac{(b-a)^p \{\psi_1(x) - \psi_1(t)\}^p}{p} \right] dt \\ &= M_k \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} c_1 \frac{\{(b-a)\psi_1(x)\}^p}{p} \end{aligned} \quad (7.58)$$

と評価できる. よって $n = 1$ で式 (7.56) は成り立つ. 同様にして,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^{n+1}[f](z) - \mathcal{A}^{n+1}[f](a) &= \int_a^z \frac{k(z, w)\mathcal{A}^n[f](w)}{(z - w)^{1-p}} dw - 0 \\ &= \int_{-\infty}^x \frac{k(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x + iy), \psi_{a,b}^{\text{SE}}(t + iy))\mathcal{A}^n[f](\psi_{a,b}^{\text{SE}}(t + iy))}{(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x + iy) - \psi_{a,b}^{\text{SE}}(t + iy))^{1-p}} \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(t + iy) dt \end{aligned} \quad (7.59)$$

と変形できるので, n で式 (7.56) が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}^{n+1}[f](z) - \mathcal{A}^{n+1}[f](a)| &\leq \int_{-\infty}^x \frac{M_k [M_k \Gamma(p) c_1 \{(b-a)\psi_1(t)\}^p]^n \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})}}{\Gamma(np+1) [(b-a)\{\psi_1(x) - \psi_1(t)\}]^{1-p}} (b-a)c_1 \psi_1'(t) dt \\ &= \frac{[M_k \Gamma(p) c_1]^{n+1}}{\Gamma(np+1)\Gamma(p)} \int_{-\infty}^x \frac{\{(b-a)\psi_1(t)\}^{np}}{[(b-a)\{\psi_1(x) - \psi_1(t)\}]^{1-p}} (b-a)\psi_1'(t) dt \end{aligned} \quad (7.60)$$

と評価できる. さらに $s = (b-a)\psi_1(t)$ と変数変換し, $r = (b-a)\psi_1(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^x \frac{\{(b-a)\psi_1(t)\}^{np}}{[(b-a)\{\psi_1(x) - \psi_1(t)\}]^{1-p}} (b-a)\psi_1'(t) dt &= \int_0^r \frac{s^{np}}{[r-s]^{1-p}} ds \\ &= r^{(n+1)p} B(p, np+1) \end{aligned} \quad (7.61)$$

と変形できる (ただし $B(\alpha, \beta)$ はいわゆるベータ関数) ので, $n+1$ のときも式 (7.56) は成り立つことがわかる. 以上で補題は示された. $\blacksquare$

次に, DE 変換を用いた場合について示す. まず補題 7.17 に対応する, 次の補題が成り立つ.

補題 7.19 (Okayama et al. [100, Lemma A.4]) d を $0 < d < \pi/2$ をみたす定数, x を任意の実数とする. このとき, 関数 $\psi_y(x)$ を

$$\psi_y(x) = \frac{1}{2} \tanh \left(\frac{\pi \cos(y)}{2} \sinh(x) \right) + \frac{1}{2} \quad (7.62)$$

で定めると、 d のみに依存する定数 c_2 が存在して、 $|y| \leq d$ をみたす任意の実数 y に対し

$$|\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(x + iy)| \leq (b - a)c_2\psi_y'(x), \quad (7.63)$$

$$|\psi_{0,1}^{\text{DE}}(x + iy)| \geq \psi_y(x) \quad (7.64)$$

が成り立つ。さらに $x \geq t$ のときは、次の評価が成り立つ：

$$|\psi_{a,b}^{\text{DE}}(x + iy) - \psi_{a,b}^{\text{DE}}(t + iy)| \geq (b - a)\{\psi_y(x) - \psi_y(t)\}. \quad (7.65)$$

証明. 簡便のために、 c_y と s_y を $c_y = (\pi/2) \cos y$, $s_y = (\pi/2) \sin y$ で定める。式 (7.63) は補題 3.12 と同様に証明できる。また式 (7.64) は、

$$|\psi_{0,1}^{\text{DE}}(x + iy)| = \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \exp(-2c_y \sinh x) \cos(2s_y \cosh x) + \exp(-4c_y \sinh x)}} \quad (7.66)$$

$$\geq \frac{1}{\sqrt{1 + 2 \exp(-2c_y \sinh x) + \exp(-4c_y \sinh x)}} \quad (7.67)$$

$$= \psi_y(x) \quad (7.68)$$

と直ちに示される。最後に式 (7.65) を示す。次の不等式

$$|\cosh\{(\pi/2) \sinh(x + iy)\}| = \sqrt{\cosh^2\{c_y \sinh(x)\} - \sin^2\{s_y \cosh(x)\}} \leq \cosh\{c_y \sinh(x)\} \quad (7.69)$$

と、次の不等式

$$\begin{aligned} & |\sinh[(\pi/2)\{\sinh(x + iy) - \sinh(t + iy)\}]| \\ &= \sqrt{\sinh^2[c_y\{\sinh(x) - \sinh(t)\}] + \sin^2[s_y\{\cosh(x) - \cosh(t)\}]} \\ &\geq \sinh[c_y\{\sinh(x) - \sinh(t)\}] \end{aligned} \quad (7.70)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} |\psi_{a,b}^{\text{DE}}(x + iy) - \psi_{a,b}^{\text{DE}}(t + iy)| &= \frac{b - a}{2} \left| \frac{\sinh[(\pi/2)\{\sinh(x + iy) - \sinh(t + iy)\}]}{\cosh\{(\pi/2) \sinh(x + iy)\} \cosh\{(\pi/2) \sinh(t + iy)\}} \right| \\ &\geq \frac{b - a}{2} \frac{\sinh\{c_y(\sinh(x) - \sinh(t))\}}{\cosh\{c_y \sinh(x)\} \cosh\{c_y \sinh(t)\}} \\ &= (b - a)\{\psi_y(x) - \psi_y(t)\} \end{aligned} \quad (7.71)$$

と評価できる。以上で補題は示された。 ■

この補題 7.19 の不等式 (7.65) を用いると、

$$(b - a)\psi_y(x) \leq (b - a)|\psi_{0,1}^{\text{DE}}(x + iy)| = |\psi_{a,b}^{\text{DE}}(x + iy) - a| = |z - a| \quad (7.72)$$

と評価できるので、補題 7.12 を示すには次の補題を示せば十分である。

補題 7.20 $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ とおく. 任意の $z, w \in \overline{\mathfrak{D}}$ に対し $k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ かつ $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ とし, さらに $f \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ とする. このとき, 関数 ψ_y を式 (7.62) で定め, M_k を式 (3.29) で定めると, 任意の $z \in \overline{\mathfrak{D}}$ と $n \in \mathbb{N}$ に対して次のような評価が成り立つ:

$$|\mathcal{A}^n[f](z)| \leq \frac{[M_k \Gamma(p) c_2 \{(b-a)\psi_y(x)\}^p]^n}{\Gamma(np+1)} \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})}. \quad (7.73)$$

ただし $x = \text{Re}[\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(z)]$, $y = \text{Im}[\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(z)]$ であり, c_2 は d のみに依存する正の定数である.

証明. 補題 7.18 の証明において, SE 変換を DE 変換に, ψ_1 を ψ_y に置き換えればよい. ■

7.6 証明：スキームの可解性と収束性の解析

7.6.1 修正した SE-Sinc 選点法に対して

ここでは, 定理 7.8 の証明を行う.

証明の流れ

元々の方程式 (1.5) に加えて, 次の五つの方程式

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A}) \tilde{u} = \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} g, \quad (7.74)$$

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}) v = g, \quad (7.75)$$

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}) \tilde{v} = g, \quad (7.76)$$

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}) w = \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} g, \quad (7.77)$$

$$(\lambda \check{E}_m^{\text{SE}} - \check{A}_m^{\text{SE}}) \mathbf{c}_m = \check{\mathbf{g}}_m^{\text{SE}} \quad (7.78)$$

を考えて, 次のステップで解析を進める:

1. 十分大きな N では方程式 (7.74) は一意可解 (補題 7.25).
2. 方程式 (7.74) が一意可解であれば方程式 (7.75) は一意可解 (補題 7.27).
3. 方程式 (7.75) が一意可解であれば十分大きな N では方程式 (7.76) は一意可解 (補題 7.29).
4. 方程式 (7.76) が一意可解であれば方程式 (7.77) は一意可解 (補題 7.33).
5. 方程式 (7.77) が一意可解であれば方程式 (7.78) は一意可解 (補題 7.34).

解析の都合上, ステップの進み方がこれまでの章と逆になっているので注意. 最後にこれらの補題をまとめて, 定理 7.8 を示す.

第5章での Sinc 選点法における, §5.6.1 の解析で考えた方程式との対応は, 次のようになっている:

第5章	第7章	
$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{V})u = g,$	$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A})u = g,$	(7.79)
	$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A})\tilde{u} = \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} g,$	(7.80)
	$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})v = g,$	(7.81)
$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{V}_N^{\text{SE}})v = g,$	$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})\tilde{v} = g,$	(7.82)
$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{V}_N^{\text{SE}})w = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} g,$	$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}})w = \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} g,$	(7.83)
$(\lambda E_m^{\text{SE}} - \tilde{V}_m^{\text{SE}})\mathbf{c}_m = \tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{SE}},$	$(\lambda \check{E}_m^{\text{SE}} - \check{A}_m^{\text{SE}})\mathbf{c}_m = \check{\mathbf{g}}_m^{\text{SE}}.$	(7.84)

第5章においては $\mathcal{V}_N^{\text{SE}} \mathcal{P}_N^{\text{SE}} f = \mathcal{V}_N^{\text{SE}} f$ が成り立ったので, 元々の方程式 (7.79) から方程式 (7.82) に直接関係づけられた. ところが今回の場合は, 元々の方程式 (7.79) から方程式 (7.82) に直接関係づけることは難しい. これは, 今回は積分近似のサンプリング点集合が選点集合に含まれず, $\mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} f = \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} f$ が成り立たないためである. そのため, さらに方程式 (7.80) と (7.81) を間に挟んで解析する.

ステップ 1. 十分大きな N では方程式 (7.74) は一意可解

まず, 元の方程式 (1.5) の解の存在と一意性は, 次のように知られている.

定理 7.21 (Brunner [15, Theorem 6.1.2]) $k \in C([a, b] \times [a, b])$ とする. このとき, 作用素 $(I - \mathcal{A}) : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ は有界な逆作用素 $(I - \mathcal{A})^{-1} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ を持つ. さらに $g \in \mathbf{X}$ であれば, 方程式 (1.5) には唯一解 $u \in \mathbf{X}$ が存在する.

この結果より, もし, $N \rightarrow \infty$ で $\|\mathcal{A} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \rightarrow 0$ となることが示されれば, Banach の摂動定理より, ある N 以上では $(I - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A})$ も有界な逆作用素を持つので, 方程式 (7.74) は一意可解であることが言える. ただし, 連続関数の空間で考えなければならないので, 定理 2.30 の結果を適用することはできない. そこで, なめらかさの条件を緩めて誤差解析を行っている, 次の結果を用いる.

定理 7.22 (Butzer et al. [19, Theorem 3.9]) 関数 F は実軸上で有界で, かつある正の定数 L_F と $0 < \mu \leq 1$ をみたす定数 μ が存在して, 任意の実数 x と y に対し

$$|F(x) - F(y)| \leq L_F |x - y|^\mu \quad (7.85)$$

が成り立つとする. さらにある正の定数 R_F が存在して, $|x| \geq 1$ をみたす任意の実数 x に対し

$$|F(x)| \leq R_F |x|^{-1} \quad (7.86)$$

と評価できるとする. このとき, $h \leq e^{-2/(1+\mu)}$ であれば, 次の評価が成り立つ:

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - \mathcal{C}_h[F](x)| \\ & \leq (1+\mu) \left[7 \left(\frac{2}{\pi} \right)^\mu \left(\frac{1}{2} + \sqrt{5} e \right) L_F + 2e \left\{ 4R_F + 3 \sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x)| \right\} \right] \frac{h^\mu}{\log(1/h)}. \end{aligned} \quad (7.87)$$

この定理の式 (7.85) では, 関数の Hölder 連続性が仮定されているが, 実は $f \in \mathbf{X}$ のとき, $\mathcal{A}f$ は p 次 Hölder 連続となることが次の補題よりわかる.

補題 7.23 $f \in \mathbf{X}$ とする. また任意の $t, s \in [a, b]$ に対して, $k(t, \cdot) \in \mathbf{X}$ かつ $k(\cdot, s)$ は p 次 Hölder 連続, すなわちある定数 H_k が存在して

$$|k(t, s) - k(t', s)| \leq H_k |t - t'|^p \quad (7.88)$$

が任意の $t, t' \in [a, b]$ に対して成り立つとする. このとき, f に依存しない定数 $H_{\mathcal{A}}$ が存在して, 任意の $t, t' \in [a, b]$ に対して次の評価が成り立つ:

$$|\mathcal{A}[f](t) - \mathcal{A}[f](t')| \leq H_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}} |t - t'|^p. \quad (7.89)$$

証明. 一般性を失わず $a \leq t' \leq t \leq b$ とする. $\mathcal{A}[f](t) - \mathcal{A}[f](t')$ を考えると,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[f](t) - \mathcal{A}[f](t') &= \int_{t'}^t \frac{k(t, s)}{(t-s)^{1-p}} f(s) ds + \int_a^{t'} \frac{k(t, s) - k(t', s)}{(t-s)^{1-p}} f(s) ds \\ &\quad + \int_a^{t'} \left\{ \frac{1}{(t-s)^{1-p}} - \frac{1}{(t'-s)^{1-p}} \right\} k(t', s) f(s) ds \end{aligned} \quad (7.90)$$

と変形できるので, それぞれの項について評価する. まず,

$$\tilde{M}_k = \max_{t, s \in [a, b]} |k(t, s)| \quad (7.91)$$

とおくと, 一つ目の積分項について

$$\left| \int_{t'}^t \frac{k(t, s)}{(t-s)^{1-p}} f(s) ds \right| \leq \frac{\tilde{M}_k \|f\|_{\mathbf{X}}}{p} (t - t')^p \quad (7.92)$$

が成り立ち, 二つ目の積分項については, 式 (7.88) を用いると

$$\begin{aligned} \left| \int_a^{t'} \frac{k(t, s) - k(t', s)}{(t-s)^{1-p}} f(s) ds \right| &\leq H_k (t - t')^p \|f\|_{\mathbf{X}} \int_a^{t'} \frac{ds}{(t-s)^{1-p}} \\ &\leq \frac{H_k \|f\|_{\mathbf{X}}}{p} \{ (t-a)^p - (t-t')^p \} (t-t')^p \\ &\leq \frac{H_k \|f\|_{\mathbf{X}} (b-a)^p}{p} (t-t')^p \end{aligned} \quad (7.93)$$

と評価できる．三つ目の積分項については

$$\begin{aligned}
& \left| \int_a^{t'} \left\{ \frac{1}{(t-s)^{1-p}} - \frac{1}{(t'-s)^{1-p}} \right\} k(t', s) f(s) ds \right| \\
& \leq \tilde{M}_k \|f\|_{\mathbf{X}} \int_a^{t'} \left\{ \frac{1}{(t'-s)^{1-p}} - \frac{1}{(t-s)^{1-p}} \right\} ds \\
& = \frac{\tilde{M}_k \|f\|_{\mathbf{X}}}{p} [(t-t')^p - \{(t-a)^p - (t'-a)^p\}] \\
& \leq \frac{\tilde{M}_k \|f\|_{\mathbf{X}}}{p} [(t-t')^p + \{(t-a)^p - (t'-a)^p\}] \\
& \leq \frac{\tilde{M}_k \|f\|_{\mathbf{X}}}{p} [(t-t')^p + (t-t')^p] \\
& = \frac{2\tilde{M}_k \|f\|_{\mathbf{X}}}{p} (t-t')^p
\end{aligned} \tag{7.94}$$

と評価できる．まとめれば

$$|\mathcal{A}[f](t) - \mathcal{A}[f](t')| \leq \left\{ \frac{\tilde{M}_k}{p} + \frac{H_k(b-a)^p}{p} + \frac{2\tilde{M}_k}{p} \right\} \|f\|_{\mathbf{X}} (t-t')^p \tag{7.95}$$

が成り立つ．以上で補題は示された. ■

このことより, $\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A}$ に対して次の収束性が成り立つ.

補題 7.24 補題 7.23 の仮定がみたされているとする．このとき, ある自然数 N_0 と, N に依存しない定数 $C_{\mathcal{A}}$ が存在して, $N \geq N_0$ をみたす任意の N に対し

$$\|\mathcal{A} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \leq C_{\mathcal{A}} \frac{h^p}{\log(1/h)} \tag{7.96}$$

と評価できる．ただし h と M はそれぞれ式 (7.2) と式 (7.3) で定められたものとする.

証明. 補題を示すには, 任意の $f \in \mathbf{X}$ に対して,

$$\|\mathcal{A}f - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A}f\|_{\mathbf{X}} \leq C_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}} \frac{h^p}{\log(1/h)} \tag{7.97}$$

が成り立つことを示せばよい (ただし $C_{\mathcal{A}}$ は f と N に依存しない定数). 式 (2.73) のように, 端点で 0 となる関数 $\mathcal{T}[\mathcal{A}f](t)$ を考え, SE 変換 $t = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(x)$ を適用した関数を

$$F(x) = \mathcal{T}[\mathcal{A}f](\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x)) \tag{7.98}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
|\mathcal{A}[f](t) - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}[\mathcal{A}f](t)| &= |\mathcal{T}[\mathcal{A}f](t) - \mathcal{C}_{N,M}^{\text{SE}}[\mathcal{T}\mathcal{A}f](t)| \\
&= |F(x) - \mathcal{C}_{N,M}[F](x)| \\
&\leq |F(x) - \mathcal{C}_h[F](x)| \\
&\quad + \sum_{j=-\infty}^{-N-1} |F(jh)S(j,h)(x)| + \sum_{j=M+1}^{\infty} |F(jh)S(j,h)(x)|
\end{aligned} \tag{7.99}$$

と評価できる。先にこの第一項を定理 7.22 を用いて評価する。まず補題 7.23 より、

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}[\mathcal{A}f](t)| &= \left| \frac{b-t}{b-a} \{ \mathcal{A}[f](t) - \mathcal{A}[f](a) \} - \frac{t-a}{b-a} \{ \mathcal{A}[f](b) - \mathcal{A}[f](t) \} \right| \\
&\leq \frac{b-t}{b-a} H_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}} (t-a)^p + \frac{t-a}{b-a} H_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}} (b-t)^p \\
&= \left\{ \frac{(b-t)^{1-p}}{b-a} + \frac{(t-a)^{1-p}}{b-a} \right\} H_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}} (t-a)^p (b-t)^p \\
&\leq \left\{ \frac{2}{b-a} \right\}^p H_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}} (t-a)^p (b-t)^p
\end{aligned} \tag{7.100}$$

と評価できるので、

$$|F(x)| \leq \left\{ \frac{2}{b-a} \right\}^p H_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}} \left\{ \frac{b-a}{1+e^{-x}} \right\}^p \left\{ \frac{b-a}{1+e^x} \right\}^p \tag{7.101}$$

より

$$|F(x)| \leq \frac{\{2(b-a)\}^p H_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}}}{1+p|x|} \leq \frac{\{2(b-a)\}^p H_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}}}{p|x|}, \tag{7.102}$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x)| \leq \left(\frac{b-a}{2} \right)^p H_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}} \tag{7.103}$$

がそれぞれ成り立つ。またやはり補題 7.23 より、

$$\begin{aligned}
|\mathcal{T}[\mathcal{A}f](t) - \mathcal{T}[\mathcal{A}f](t')| &= \left| \mathcal{A}[f](t) - \mathcal{A}[f](t') - \{ \mathcal{A}[f](b) - \mathcal{A}[f](a) \} \frac{t-t'}{b-a} \right| \\
&\leq H_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}} |t-t'|^p + H_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}} |b-a|^p \frac{|t-t'|^{1-p}}{b-a} |t-t'|^p \\
&\leq 2H_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}} |t-t'|^p
\end{aligned} \tag{7.104}$$

が任意の $t, t' \in [a, b]$ に対し成り立つので、 $t' = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(y)$ とすると

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(y)| &\leq 2H_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}} |\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x) - \psi_{a,b}^{\text{SE}}(y)|^p \\
&\leq 2H_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}} \left(\frac{b-a}{4} \right)^p |x-y|^p
\end{aligned} \tag{7.105}$$

と評価できる。よって関数 F は定理 7.22 の条件をみたすので、 $h \leq e^{-2/(1+p)}$ であれば、 N と f によらない定数 C_1 によって

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - \mathcal{C}_h[F](x)| \leq C_1 \|f\|_{\mathbf{X}} \frac{h^p}{\log(1/h)} \tag{7.106}$$

と評価できる。これで第一項の評価は完了した。

次に残る項（打ち切り誤差）を評価する。 $N \geq M$ と $|S(j, h)(x)| \leq 1$ より、

$$\sum_{j=-\infty}^{-N-1} |F(jh)S(j, h)(x)| + \sum_{j=M+1}^{\infty} |F(jh)S(j, h)(x)| \leq \sum_{|j| \geq M+1} |F(jh)| \tag{7.107}$$

が成り立つ。さらに再び式 (7.101) を用いると、

$$\begin{aligned}
 \sum_{|j| \geq M+1} |F(jh)| &\leq 2\{2(b-a)\}^p H_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}} \sum_{j=M+1}^{\infty} e^{-pjh} \\
 &\leq 2\{2(b-a)\}^p H_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}} \int_M^{\infty} e^{-phs} ds \\
 &= 2\{2(b-a)\}^p H_{\mathcal{A}} \|f\|_{\mathbf{X}} \frac{e^{-pMh}}{ph}
 \end{aligned} \tag{7.108}$$

と評価でき、さらに M と N と h の関係に注意すれば、 f と N によらない定数 C_2 が存在して

$$\frac{e^{-pMh}}{ph} \leq \frac{e^{-p^2Nh}}{ph} = \frac{e^{-\pi p d/h}}{ph} \leq C_2 \frac{h^p}{\log(1/h)} \tag{7.109}$$

と評価できる。以上で補題は証明された。 $\blacksquare$

定理 7.7 の仮定の下でこの補題の仮定は明らかに成り立つ。よって $\|\mathcal{A} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \rightarrow 0$ となることが示されたので、Banach の摂動定理より、次の補題が成り立つ。

補題 7.25 定理 7.7 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ かつ $\mathfrak{D}' = \psi_{a,b'}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする。このときある自然数 N_0 が存在して、 $N \geq N_0$ をみたす任意の自然数 N に対し、方程式 (7.74) は一意可解で、また $\|(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ は N に対し一様に有界である。

ステップ 2. 方程式 (7.74) が一意可解であれば方程式 (7.75) は一意可解

ここでは次の補題が有用である。

補題 7.26 (Atkinson [8, Lemma 3.4.1]) $\mathbf{Y}$ は Banach 空間とし、 $\mathcal{W}$ と $\mathcal{X}$ は $\mathbf{Y}$ をそれぞれ自身に写す有界な線形作用素とする。さらに、 $(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{W}\mathcal{X}) : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$ は有界な逆作用素 $(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{W}\mathcal{X})^{-1} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$ を持つとする。このとき、 $(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{X}\mathcal{W}) : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$ にも有界な逆作用素 $(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{X}\mathcal{W})^{-1} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$ が存在し、次のように表される：

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{X}\mathcal{W})^{-1} = \frac{1}{\lambda} [\mathcal{I} + \mathcal{X}(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{W}\mathcal{X})^{-1} \mathcal{W}]. \tag{7.110}$$

この補題より、次の補題を示せる。

補題 7.27 方程式 (7.74) が一意可解であれば方程式 (7.75) は一意可解であり、またそれらの解の間には $v = (g + \mathcal{A}\tilde{u})/\lambda$, $\tilde{u} = \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} v$ の関係が成り立つ。さらに N によらない定数 C が存在して、次の不等式が成り立つ：

$$\|(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \leq C \log(N+1). \tag{7.111}$$

証明. 補題 7.26 より前半部分は明らかであり、また後半部分も

$$\begin{aligned}
 \|(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} &= \frac{1}{\lambda} \|\mathcal{I} + \mathcal{A}(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A})^{-1} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \\
 &\leq \frac{1 + \|\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \|(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \|\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}}{\lambda}
 \end{aligned} \tag{7.112}$$

と評価できる. 補題 7.25 より $\|(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})}$ は一様有界であり, また補題 5.11 を用いると, ある定数 C_0 で

$$\|\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \leq \|\mathcal{P}_{N,N}^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \leq C_0 \log(N+1) \quad (7.113)$$

と評価できる. 以上で補題は示された. ■

ステップ 3. 方程式 (7.75) が一意可解であれば十分大きな N では方程式 (7.76) は一意可解

ここでも, Banach の摂動定理を用いることを考える. 今回の場合に適用するには,

$$\|(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}})\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (7.114)$$

を示す必要がある. 補題 7.27 において, $\|(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})}$ は $\log(N+1)$ のオーダーで評価されているので, $\|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}})\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})}$ はその増大を抑制して 0 に収束可能なオーダーで評価せねばならない. ここでは, 次のように評価を与える.

補題 7.28 定理 7.7 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ かつ $\mathfrak{D}' = \psi_{a,b'}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする. このとき N に依存しない定数 C が存在して, 次のような評価が成り立つ:

$$\|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}})\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \leq C \log(N+1) e^{-\sqrt{\pi dp N}}. \quad (7.115)$$

もしこの補題が成り立つとすれば, 次のようにしてこのステップ 3 の目標は達成される.

補題 7.29 定理 7.7 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ かつ $\mathfrak{D}' = \psi_{a,b'}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする. さらに, 方程式 (7.75) が一意可解であるとする. このときある自然数 N_0 が存在して, $N \geq N_0$ をみたす任意の自然数 N に対し, 方程式 (7.76) は一意可解である. さらに N によらない定数 C が存在して, 次の不等式が成り立つ:

$$\|(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \leq C \log(N+1). \quad (7.116)$$

証明. Banach の摂動定理より前半は明らかである. さらに同じく Banach の摂動定理より, 十分大きな N では

$$\begin{aligned} & \|(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \\ & \leq \frac{\|(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})}}{1 - \|(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}})\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})}} \\ & \leq \frac{C_1 \log(N+1)}{1 - C_1 \log(N+1) C_2 \log(N+1) e^{-\sqrt{\pi dp N}}} \\ & \leq C_3 \log(N+1) \end{aligned} \quad (7.117)$$

と N に依存しない定数 C_1, C_2, C_3 によって評価できる. よって補題の主張が成り立つ. ■

以下では補題 7.28 を示す. そのために, 以下で補題を三つ用意する.

補題 7.30 補題 5.12 の仮定に加え, y を実数, d を正の定数とすると, 次の評価が成り立つ:

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ |y| \leq d}} \sum_{j=-N}^N |S(j, h)(x + iy)| \leq \left(\frac{2}{\pi} + 1 \right) (3 + \log N) e^{\pi d/h}. \quad (7.118)$$

証明. $y = 0$ の場合は補題 5.12 に帰着されるので, ここでは $y \neq 0$ として考える. $\zeta = x + iy$ とおき, $S(j, h)(\zeta)$ を三角関数の加法定理を用いて展開して整理すると,

$$S(j, h)(\zeta) = \frac{\sin \frac{\pi}{h}(x - jh) \cosh(\frac{\pi y}{h})}{\frac{\pi}{h}((x - jh) + iy)} + i \frac{\sin \frac{\pi}{h}((x - jh) + \frac{h}{2})}{\frac{\pi}{h}((x - jh) + \frac{h}{2})} \frac{(x - jh) + \frac{h}{2}}{(x - jh) + iy} \sinh\left(\frac{\pi y}{h}\right) \quad (7.119)$$

と表せる. よってこの絶対値をとって評価していくと,

$$\begin{aligned} & |S(j, h)(\zeta)| \\ & \leq |S(j, h)(x)| \cosh\left(\frac{\pi y}{h}\right) + \left|S(j, h)\left(x + \frac{h}{2}\right)\right| \frac{|(x - jh) + \frac{h}{2}|}{\sqrt{(x - jh)^2 + y^2}} \left|\sinh\left(\frac{\pi y}{h}\right)\right| \\ & \leq |S(j, h)(x)| \cosh\left(\frac{\pi y}{h}\right) + \left|S(j, h)\left(x + \frac{h}{2}\right)\right| \sqrt{1 + \frac{h^2}{4y^2}} \left|\sinh\left(\frac{\pi y}{h}\right)\right| \\ & = \left\{ |S(j, h)(x)| \frac{1 + e^{-2\pi|y|/h}}{2} + \left|S(j, h)\left(x + \frac{h}{2}\right)\right| \sqrt{1 + \frac{h^2}{4y^2}} \frac{1 - e^{-2\pi|y|/h}}{2} \right\} e^{\pi|y|/h} \\ & \leq \left\{ |S(j, h)(x)| \cdot 1 + \left|S(j, h)\left(x + \frac{h}{2}\right)\right| \cdot \frac{\pi}{2} \right\} e^{\pi|y|/h} \end{aligned} \quad (7.120)$$

となる. したがって, 補題 5.12 の結果を用いれば,

$$\begin{aligned} \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ |y| \leq d}} \sum_{j=-N}^N |S(j, h)(\zeta)| & \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \left\{ \sum_{j=-N}^N |S(j, h)(x)| + \frac{\pi}{2} \sum_{j=-N}^N \left|S(j, h)\left(x + \frac{h}{2}\right)\right| \right\} e^{\pi d/h} \\ & \leq \left(\frac{2}{\pi} + 1 \right) (3 + \log N) e^{\pi d/h} \end{aligned} \quad (7.121)$$

が成り立つ. ■

補題 7.31 関数 k は, 定理 7.7 の仮定を $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ かつ $\mathfrak{D}' = \psi_{a,b'}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたすとする. また $f \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ とする. このとき, 式 (3.29) で M_k を定めると, 次の評価が成り立つ:

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [a, b]} \left| \mathcal{A}[f](t) - (t - a)^p h \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{k(t, \psi_{a,t}^{\text{SE}}(lh)) f(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(lh))}{(1 + e^{-lh})(1 + e^{lh})^p} \right| \\ & \leq \frac{4M_k \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} (b - a)^p}{p \cos^{1+p}(d/2)} \frac{e^{-2\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}}. \end{aligned} \quad (7.122)$$

証明. 補題 7.4 (もしくは補題 7.14) の結果より, 一般に $f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\cdot))$ が $\mathcal{D}_d$ で正則かつ $\overline{\mathcal{D}_d}$ で連続ならば, 任意の $t \in [a, b]$ に対し $f(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(\cdot))$ は $\mathcal{D}_d$ で正則かつ $\overline{\mathcal{D}_d}$ で連続であることが言える.

よって後の補題 9.18 を任意の $t \in [a, b]$ の場合に用いることができ, $L = M_k \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})}$, $\alpha = 1$, $\beta = p$ より

$$\left| \mathcal{A}[f](t) - (t-a)^p h \sum_{l=-\infty}^{\infty} \frac{k(t, \psi_{a,t}^{\text{SE}}(lh)) f(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(lh))}{(1+e^{-lh})(1+e^{lh})^p} \right| \leq \frac{4M_k \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} (t-a)^p}{p \cos^{1+p}(d/2)} \frac{e^{-2\pi d/h}}{1-e^{-2\pi d/h}} \quad (7.123)$$

が成り立つ. あと $(t-a)^p \leq (b-a)^p$ と評価すればよい. $\blacksquare$

補題 7.32 関数 k は, 定理 7.7 の仮定を $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ かつ $\mathfrak{D}' = \psi_{a,b'}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたすとする. また $f \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ とする. このとき, 式 (7.91) で $\tilde{M}_k$ を定めると,

$$\begin{aligned} \max_{t \in [a, b]} \left| (t-a)^p h \sum_{l=-\infty}^{-M-1} \frac{k(t, \psi_{a,t}^{\text{SE}}(lh)) f(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(lh))}{(1+e^{-lh})(1+e^{lh})^p} \right. \\ \left. + (t-a)^p h \sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{k(t, \psi_{a,t}^{\text{SE}}(lh)) f(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(lh))}{(1+e^{-lh})(1+e^{lh})^p} \right| \leq \frac{1+p}{p} (b-a)^p \tilde{M}_k \|f\|_{\mathbf{X}} e^{-pNh} \end{aligned} \quad (7.124)$$

と評価できる. ただし M は式 (7.3) で定められたものとする.

証明. まず

$$\begin{aligned} \left| (t-a)^p h \sum_{l=-\infty}^{-M-1} \frac{k(t, \psi_{a,t}^{\text{SE}}(lh)) f(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(lh))}{(1+e^{-lh})(1+e^{lh})^p} + (t-a)^p h \sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{k(t, \psi_{a,t}^{\text{SE}}(lh)) f(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(lh))}{(1+e^{-lh})(1+e^{lh})^p} \right| \\ \leq (b-a)^p h \sum_{l=-\infty}^{-M-1} \tilde{M}_k \|f\|_{\mathbf{X}} e^{lh} + (b-a)^p h \sum_{l=N+1}^{\infty} \tilde{M}_k \|f\|_{\mathbf{X}} e^{-plh} \end{aligned} \quad (7.125)$$

と評価でき, さらに M と N の関係に注意すると,

$$\begin{aligned} h \sum_{l=-\infty}^{-M-1} e^{lh} + h \sum_{l=N+1}^{\infty} e^{-plh} &\leq \int_{-\infty}^{-M} h e^{hs} ds + \int_N^{\infty} h e^{-phs} ds \\ &= e^{-Mh} + \frac{1}{p} e^{-pNh} \\ &\leq e^{-pNh} + \frac{1}{p} e^{-pNh} \end{aligned} \quad (7.126)$$

と評価できるので, 補題は示された. $\blacksquare$

以上の準備により, 補題 7.28 は次のように証明できる.

証明. 補題を示すには, f と N によらない定数 C_0 が存在して, 任意の $f \in \mathbf{X}$ に対して

$$\|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}) \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} f\|_{\mathbf{X}} \leq C_0 \|f\|_{\mathbf{X}} \log(N+1) e^{-\sqrt{\pi dp N}} \quad (7.127)$$

が成り立つことを示せばよい。まず、

$$\begin{aligned} & (\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}) \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}[f](t) \\ &= (\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}) \left[f(a) \omega_a(\cdot) + \sum_{j=-N}^M \mathcal{T}[f](\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot)) + f(b) \omega_b(\cdot) \right] (t) \end{aligned} \quad (7.128)$$

と変形できるので、式 (2.73) より $\|\mathcal{T}f\|_{\mathbf{X}} \leq 3\|f\|_{\mathbf{X}}$ と評価できることを用いると、

$$\begin{aligned} & |(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}) \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}[f](t)| \\ &\leq \|\mathcal{T}f\|_{\mathbf{X}} |(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}})[\mathcal{C}_{N,M}^{\text{SE}}[1]](t)| + \|f\|_{\mathbf{X}} \{ |(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}})[\omega_a](t)| + |(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}})[\omega_b](t)| \} \\ &\leq 3\|f\|_{\mathbf{X}} |(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}})[\mathcal{C}_{N,M}^{\text{SE}}[1]](t)| + \|f\|_{\mathbf{X}} \{ |(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}})[\omega_a](t)| + |(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}})[\omega_b](t)| \} \end{aligned} \quad (7.129)$$

と評価できる。ここで補題 7.31 と補題 7.32 を用いると、

$$\begin{aligned} |(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}})[\mathcal{C}_{N,M}^{\text{SE}}[1]](t)| &\leq \frac{4M_k \|\mathcal{C}_{N,M}^{\text{SE}}[1]\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} (b-a)^p}{p \cos^{1+p}(d/2)} \frac{e^{-2\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}} \\ &\quad + \frac{1+p}{p} (b-a)^p \tilde{M}_k \|\mathcal{C}_{N,M}^{\text{SE}}[1]\|_{\mathbf{X}} e^{-pNh} \end{aligned} \quad (7.130)$$

と評価できる。また補題 5.12 と 7.30 より、ある定数 C_1 と C_2 が存在して

$$\|\mathcal{C}_{N,M}^{\text{SE}}[1]\|_{\mathbf{X}} \leq \|\mathcal{C}_{N,N}^{\text{SE}}[1]\|_{\mathbf{X}} \leq C_1 \log(N+1) \quad (7.131)$$

$$\|\mathcal{C}_{N,M}^{\text{SE}}[1]\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} \leq \|\mathcal{C}_{N,N}^{\text{SE}}[1]\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} \leq C_2 \log(N+1) e^{\pi d/h} \quad (7.132)$$

がそれぞれ成り立つので、 h に式 (7.2) を代入して整理すれば、 N と f によらない定数 C_3 によって

$$|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}})[\mathcal{C}_{N,M}^{\text{SE}}[1]](t)| \leq C_3 \log(N+1) e^{-\sqrt{\pi dp N}} \quad (7.133)$$

と評価できる。同様の評価によって、やはり N と f によらない定数 C_4, C_5 によって

$$|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}})[\omega_a](t)| \leq C_4 e^{-\sqrt{\pi dp N}}, \quad (7.134)$$

$$|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}})[\omega_b](t)| \leq C_5 e^{-\sqrt{\pi dp N}} \quad (7.135)$$

と評価できることがわかるので、補題は示された。 ■

ステップ 4. 方程式 (7.76) が一意可解であれば方程式 (7.77) は一意可解

次の補題が成り立つ。 $\mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} f = \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} f$ は成り立たないことだけ注意すれば、証明の方針は補題 5.10 と基本的には同様であるので省略する。

補題 7.33 次の二つは同値である：

- (A) 方程式 (7.76) には一意解 $\tilde{v} \in \mathbf{X}$ が存在する。
- (B) 方程式 (7.77) には一意解 $w \in \mathbf{X}$ が存在する。

さらに、それらの解の間には $w = \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \tilde{v}$ と $\tilde{v} = (g + \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} w)/\lambda$ の関係が成り立つ。

ステップ 5. 方程式 (7.77) が一意可解であれば方程式 (7.78) は一意可解

次の補題が成り立つ. 証明は補題 5.9 と全く同様なので省略する.

補題 7.34 次の二つは同値である:

- (A) 方程式 (7.77) には一意解 $w \in \mathbf{X}$ が存在する.
- (B) 方程式 (7.78) には一意解 $\mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^m$ が存在する.

さらに, 修正した Sinc 選点法の近似解 u_N^{SE} とは $w = u_N^{\text{SE}}$ が成り立つ.

最終ステップ. 定理 7.8 の証明

以上の五つのステップの結果を用いて, 定理 7.8 は次のように証明できる.

証明. 補題 7.27, 7.33, 7.34 の結果より,

$$u - u_N^{\text{SE}} = u - w = u - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \tilde{v} = (u - \tilde{u}) + (\tilde{u} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \tilde{v}) = (u - \tilde{u}) + \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} (v - \tilde{v}) \quad (7.136)$$

と変形できるので,

$$\|u - u_N^{\text{SE}}\|_{\mathbf{X}} \leq \|u - \tilde{u}\|_{\mathbf{X}} + \|\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}\|_{\mathbf{X}} \|v - \tilde{v}\|_{\mathbf{X}} \quad (7.137)$$

が成り立つ. まず第一項を評価する. 補題 7.25 より, $(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A})^{-1}$ が存在して,

$$\begin{aligned} u - \tilde{u} &= (\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A})^{-1} (\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A}) u - (\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A})^{-1} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} g \\ &= (\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A})^{-1} [\lambda u - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} (\mathcal{A} u + g)] \\ &= (\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A})^{-1} [\lambda u - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} (\lambda u)] \end{aligned} \quad (7.138)$$

と変形できる. 補題 7.25 より $\|(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ は一様有界である. また定理 7.7 より, $u \in \mathbf{M}_{p,1}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ であることを用いれば, 定理 2.30 が適用できるので, 結局

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}\|_{\mathbf{X}} &\leq \|(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} |\lambda| \|u - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} u\|_{\mathbf{X}} \\ &\leq C_1 |\lambda| C_2 \sqrt{N} e^{-\sqrt{\pi d p N}} \end{aligned} \quad (7.139)$$

とある定数 C_1, C_2 を用いて評価できる. 次に第二項を評価する. まず $\|\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}\|_{\mathbf{X}}$ は式 (7.113) で評価できる. また補題 7.29 より, $(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})^{-1}$ が存在して,

$$\begin{aligned} v - \tilde{v} &= (\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})^{-1} (\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}) v - (\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})^{-1} g \\ &= (\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})^{-1} [\lambda v - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} v - g] \\ &= (\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})^{-1} [g + \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} v - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} v - g] \\ &= (\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})^{-1} [(A - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}) \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}} v] \end{aligned} \quad (7.140)$$

と変形できるので,

$$\|v - \tilde{v}\|_{\mathbf{X}} \leq \|(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \|(A - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}) \mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \|v\|_{\mathbf{X}} \quad (7.141)$$

と評価できる．さらに補題 7.27, 7.28 と, 再び補題 7.29 より, ある定数 C_3, C_4, C_5 によって

$$\|(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \leq C_3 \log(N+1), \quad (7.142)$$

$$\|(A - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}})\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \leq C_4 \log(N+1) e^{-\sqrt{\pi dp N}}, \quad (7.143)$$

$$\|v\|_{\mathbf{x}} = \|(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}})^{-1}g\|_{\mathbf{x}} \leq C_5 \log(N+1) \|g\|_{\mathbf{x}} \quad (7.144)$$

と評価できるので, 結局第二項はまとめて

$$\|\mathcal{P}_{N,M}^{\text{SE}}\|_{\mathbf{x}} \|v - \tilde{v}\|_{\mathbf{x}} \leq C_0 C_3 C_4 C_5 \|g\|_{\mathbf{x}} \{\log(N+1)\}^4 e^{-\sqrt{\pi dp N}} \quad (7.145)$$

と評価できる．以上で定理は証明された. ■

7.6.2 修正した DE-Sinc 選点法に対して

ここでは, 定理 7.9 の証明を行う.

証明の流れ

元々の方程式 (1.5) に加えて, 次の五つの方程式

$$(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}\mathcal{A})\tilde{u} = \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}g, \quad (7.146)$$

$$(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}})v = g, \quad (7.147)$$

$$(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}})\tilde{v} = g, \quad (7.148)$$

$$(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}\mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}})w = \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}g, \quad (7.149)$$

$$(\lambda\check{E}_m^{\text{DE}} - \check{A}_m^{\text{DE}})c_m = \check{g}_m^{\text{DE}} \quad (7.150)$$

を考えて, 次のステップで解析を進める:

1. 十分大きな N では方程式 (7.146) は一意可解 (補題 7.36).
2. 方程式 (7.146) が一意可解であれば方程式 (7.147) は一意可解 (補題 7.37).
3. 方程式 (7.147) が一意可解であれば十分大きな N では方程式 (7.148) は一意可解 (補題 7.39).
4. 方程式 (7.148) が一意可解であれば方程式 (7.149) は一意可解 (補題 7.42).
5. 方程式 (7.149) が一意可解であれば方程式 (7.150) は一意可解 (補題 7.43).

解析の都合上, ステップの進み方がこれまでの章と逆になっているので注意. 最後にこれらの補題をまとめて, 定理 7.9 を示す.

ステップ 1. 十分大きな N では方程式 (7.146) は一意可解

SE 変換の場合と同様, 元の方程式 (1.5) の解の存在と一意性 (定理 7.21) を用いる. $N \rightarrow \infty$ で $\|\mathcal{A} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}\mathcal{A}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \rightarrow 0$ となることを示し, Banach の摂動定理を用いればよい. そのために次の補題を示す.

補題 7.35 補題 7.23 の仮定がみたされているとする。このとき、ある自然数 N_0 と、 N に依存しない定数 C_A が存在して、 $N \geq N_0$ をみたす任意の N に対し

$$\|A - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}} A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \leq C_A \frac{h^p}{\log(1/h)} \quad (7.151)$$

と評価できる。ただし h と M はそれぞれ式 (7.14) と式 (7.15) で定められたものとする。

証明. 補題を示すには、任意の $f \in \mathbf{X}$ に対して、

$$\|Af - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}} Af\|_{\mathbf{X}} \leq C_A \|f\|_{\mathbf{X}} \frac{h^p}{\log(1/h)} \quad (7.152)$$

が成り立つことを示せばよい (ただし C_A は f と N に依存しない定数)。式 (2.73) のように、端点で 0 となる関数 $T[Af](t)$ を考え、DE 変換 $t = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(x)$ を適用した関数を

$$F(x) = T[Af](\psi_{a,b}^{\text{DE}}(x)) \quad (7.153)$$

とおくと、式 (7.99) と同様にして

$$\begin{aligned} |A[f](t) - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}[Af](t)| &\leq |F(x) - \mathcal{C}_h[F](x)| \\ &\quad + \sum_{j=-\infty}^{-N-1} |F(jh)S(j, h)(x)| + \sum_{j=M+1}^{\infty} |F(jh)S(j, h)(x)| \end{aligned} \quad (7.154)$$

と評価できる。先にこの第一項を定理 7.22 を用いて評価する。まず補題 7.23 より、 $|T[Af](t)|$ は式 (7.100) のように評価できるので、

$$|F(x)| \leq \left\{ \frac{2}{b-a} \right\}^p H_A \|f\|_{\mathbf{X}} \left\{ \frac{b-a}{1 + e^{-\pi \sinh(x)}} \right\}^p \left\{ \frac{b-a}{1 + e^{\pi \sinh(x)}} \right\}^p \quad (7.155)$$

より、今回においても

$$|F(x)| \leq \frac{\{2(b-a)\}^p H_A \|f\|_{\mathbf{X}}}{1 + p|x|} \leq \frac{\{2(b-a)\}^p H_A \|f\|_{\mathbf{X}}}{p|x|}, \quad (7.156)$$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x)| \leq \left(\frac{b-a}{2} \right)^p H_A \|f\|_{\mathbf{X}} \quad (7.157)$$

がそれぞれ成り立つ。またやはり補題 7.23 より、不等式 (7.104) が任意の $t, t' \in [a, b]$ に対し成り立つので、 $t' = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(y)$ とすると

$$\begin{aligned} |F(x) - F(y)| &\leq 2H_A \|f\|_{\mathbf{X}} |\psi_{a,b}^{\text{DE}}(x) - \psi_{a,b}^{\text{DE}}(y)|^p \\ &\leq 2H_A \|f\|_{\mathbf{X}} \left(\frac{\pi(b-a)}{4} \right)^p |x - y|^p \end{aligned} \quad (7.158)$$

と評価できる。よって関数 F は定理 7.22 の条件をみたすので、 $h \leq e^{-2/(1+p)}$ であれば、 N と f によらない定数 C_1 によって

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F(x) - \mathcal{C}_h[F](x)| \leq C_1 \|f\|_{\mathbf{X}} \frac{h^p}{\log(1/h)} \quad (7.159)$$

と評価できる。これで第一項の評価は完了した。

次に残る項（打ち切り誤差）を評価する。 $N \geq M$ と $|S(j, h)(x)| \leq 1$ より、

$$\sum_{j=-\infty}^{-N-1} |F(jh)S(j, h)(x)| + \sum_{j=M+1}^{\infty} |F(jh)S(j, h)(x)| \leq \sum_{|j| \geq M+1} |F(jh)| \quad (7.160)$$

が成り立つ。ここで式 (7.155) においてさらに

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{b-a}{1+e^{-\pi \sinh(x)}} \right\}^p \left\{ \frac{b-a}{1+e^{\pi \sinh(x)}} \right\}^p &= \left\{ \frac{e^{-\pi \cosh(x)}}{(e^{-\frac{\pi}{2} \exp(x)} + e^{-\frac{\pi}{2} \exp(-x)})^2} \right\}^p \\ &\leq \frac{e^{-\frac{\pi}{2} p \exp(|x|)}}{(4e^{-\pi})^p} \end{aligned} \quad (7.161)$$

と評価できることより、

$$\begin{aligned} \sum_{|j| \geq M+1} |F(jh)| &\leq 2 \left\{ \frac{2(b-a)}{4e^{-\pi}} \right\}^p H_A \|f\|_{\mathbf{X}} \sum_{j=M+1}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2} p \exp(jh)} \\ &\leq 2 \left\{ \frac{2(b-a)}{4e^{-\pi}} \right\}^p H_A \|f\|_{\mathbf{X}} \int_M^{\infty} e^{-\frac{\pi}{2} p \exp(hs)} ds \\ &\leq 2 \left\{ \frac{2(b-a)}{4e^{-\pi}} \right\}^p H_A \|f\|_{\mathbf{X}} \frac{2}{\pi p h e^{hM}} \int_M^{\infty} \frac{\pi}{2} p h e^{hs} e^{-\frac{\pi}{2} p \exp(hs)} ds \\ &= 2 \left\{ \frac{2(b-a)}{4e^{-\pi}} \right\}^p H_A \|f\|_{\mathbf{X}} \frac{2}{\pi p h e^{hM}} e^{-\frac{\pi}{2} p \exp(Mh)} \end{aligned} \quad (7.162)$$

が成り立つ。さらに M と N と h の関係に注意すれば、 f と N によらない定数 C_2 が存在して

$$\frac{2}{\pi p h e^{hM}} e^{-\frac{\pi}{2} p \exp(Mh)} \leq \frac{2}{\pi p h e^{hN}} e^{-\frac{\pi}{2} p \{\exp(Nh)+p\}} = \frac{\{e^{-\frac{\pi}{2} p}\}^p}{\pi d h N} e^{-\pi d N} \leq C_2 \frac{h^p}{\log(1/h)} \quad (7.163)$$

と評価できる。以上で補題は証明された。 ■

よって、Banach の摂動定理より、補題 7.25 と同様に次の結果が得られる。

補題 7.36 定理 7.7 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ かつ $\mathfrak{D}' = \psi_{a,b'}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする。このときある自然数 N_0 が存在して、 $N \geq N_0$ をみたす任意の自然数 N に対し、方程式 (7.146) は一意可解で、また $\|(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}} \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})}$ は N に対し一様に有界である。

ステップ 2. 方程式 (7.146) が一意可解であれば方程式 (7.147) は一意可解

補題 7.26 より、補題 7.27 と同様に次の補題が成り立つ。証明は SE 変換を DE 変換で置き換えればよい。

補題 7.37 方程式 (7.146) が一意可解であれば方程式 (7.147) は一意可解であり、またそれらの解の間には $v = (g + \mathcal{A}\tilde{u})/\lambda$, $\tilde{u} = \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}} v$ の関係が成り立つ。さらに N によらない定数 C

が存在して、次の不等式が成り立つ：

$$\|(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{AP}_{N,M}^{\text{DE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \leq C \log(N+1). \quad (7.164)$$

ステップ 3. 方程式 (7.147) が一意可解であれば十分大きな N では方程式 (7.148) は一意可解
ここでも、Banach の摂動定理を用いることを考える。今回の場合に適用するには、

$$\|(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{AP}_{N,M}^{\text{DE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}) \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (7.165)$$

を示す必要がある。補題 7.37 において、 $\|(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{AP}_{N,M}^{\text{DE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ は $\log(N+1)$ のオーダーで評価されているので、 $\|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}) \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ はその増大を抑制して 0 に収束可能なオーダーで評価せねばならない。ここでは、次のように評価を与える。

補題 7.38 定理 7.7 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ かつ $\mathfrak{D}' = \psi_{a,b'}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする。このとき N に依存しない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}) \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \leq C \log(N+1) \exp \left[\frac{-\pi \sqrt{dpN/2}}{\log(2dN/p)} \right]. \quad (7.166)$$

もしこの補題が成り立つとすれば、次のようにしてこのステップ 3 の目標は達成される。証明は補題 7.29 の証明において、SE 変換を DE 変換に置き換えればよい。

補題 7.39 定理 7.7 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ かつ $\mathfrak{D}' = \psi_{a,b'}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする。さらに、方程式 (7.147) が一意可解であるとする。このときある自然数 N_0 が存在して、 $N \geq N_0$ をみたす任意の自然数 N に対し、方程式 (7.148) は一意可解である。さらに N によらない定数 C が存在して、次の不等式が成り立つ：

$$\|(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \leq C \log(N+1). \quad (7.167)$$

以下では補題 7.38 を示す。ここで困難な点は、注意 7.6 でも述べたように、DE 変換の場合は端点 b での正則性が求められるが、 $\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}$ の基底関数は端点 b で正則ではないということである。そのため、これまでのように、DE 変換を適用した後の関数が $\mathcal{D}_d$ で正則かつ連続という仮定はみたされない。ただし、 $\mathcal{D}_d^1$ で正則かつ連続ということは示せるので、§2.4.5 における結果を用いることができる。その結果を用いた補題を以下で二つ用意する。

補題 7.40 任意の $t \in [a, b]$ に対し、 $\mathcal{C}_{N,M}^{\text{DE}}[1](\psi_{a,t}^{\text{DE}}(\cdot))$ は $\mathcal{D}_{\pi/2}^1$ で正則かつ $\overline{\mathcal{D}_{\pi/2}^1}$ で連続である。

証明. $\mathcal{C}_{N,M}^{\text{DE}}$ の基底関数 $S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot))$ は端点 b で連続であるが特異性をもつことに注意すると、 $\mathcal{C}_{N,M}^{\text{DE}}[1](\psi_{a,t}^{\text{SE}}(z))$ は $z = \log((b-a)/(b-t)) - i\pi$ に特異性をもつ。よって、任意の $t \in [a, b]$ に対し $\mathcal{C}_{N,M}^{\text{DE}}[1](\psi_{a,t}^{\text{SE}}(\cdot))$ は $\mathcal{D}_{\pi}$ で正則かつ $\overline{\mathcal{D}_{\pi}}$ で連続なので、補題 2.33 の結果より、この補題の主張が成り立つ。 ■

補題 7.41 関数 k は、定理 7.7 の仮定を $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ かつ $\mathfrak{D}' = \psi_{a,b'}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたすとする。また $f \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d^1))$ とする。このとき、式 (3.29) で M_k を定めると、 d と p のみ

に依存する定数 $C_{d,p}$ が存在して、次の評価が成り立つ：

$$|\mathcal{A}[f](t) - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}[f](t)| \leq M_k \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D}_N)} (t-a)^p C_{d,p} \exp \left[\frac{-\pi\sqrt{2dpN}}{\log(2dN/p)} \right]. \quad (7.168)$$

ただし $\mathfrak{D}_N = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathscr{D}_N)$, $d_N = \sqrt{dp/(2N)}$ である.

証明. 式 (7.17) の変数変換後の関数

$$F_t(\sigma) = (t-a)^p \frac{k(t, \psi_{a,t}^{\text{DE}}(\sigma)) f(\psi_{a,t}^{\text{DE}}(\sigma)) \pi \cosh(\sigma)}{(1 + e^{-\pi \sinh(\sigma)})(1 + e^{\pi \sinh(\sigma)})^p} \quad (7.169)$$

を考えると, $\mathscr{D}_d^1$ で正則かつ $\overline{\mathscr{D}_d^1}$ で連続であり, $F_t(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot)) \in \mathbf{L}_{1,p}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathscr{D}_d^1))$ であることがわかるので, $\mathcal{A}f$ の被積分関数は定理 2.36 の仮定を $L = M_k \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})}$, $\alpha = 1$, $\beta = p$, $c = 2d/p$ でみす. さらに定理 2.36 の証明を今回の被積分関数で再現すると, L は積分路 (2.105) 上における関数 $|k(t, \psi_{a,t}^{\text{DE}}(\cdot)) f(\psi_{a,t}^{\text{DE}}(\cdot))|$ の最大値としてもよいことがわかるので, $L = M_k \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D}_N)}$ とかける. 以上で主張は示された. $\blacksquare$

以上の準備により, 補題 7.38 は次のように証明できる.

証明. 補題を示すには, f と N によらない定数 C_0 が存在して, 任意の $f \in \mathbf{X}$ に対して

$$\|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}) \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}} f\|_{\mathbf{X}} \leq C_0 \|f\|_{\mathbf{X}} \log(N+1) \exp \left[\frac{-\pi\sqrt{dpN/2}}{\log(2dN/p)} \right] \quad (7.170)$$

が成り立つことを示せばよい. まず, 式 (7.129) と同様にして,

$$\begin{aligned} & |(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}) \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}[f](t)| \\ & \leq 3 \|f\|_{\mathbf{X}} |(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}})[\mathcal{C}_{N,M}^{\text{DE}}[1]](t)| + \|f\|_{\mathbf{X}} \{ |(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}})[\omega_a](t)| + |(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}})[\omega_b](t)| \} \end{aligned} \quad (7.171)$$

と評価できる. ここで補題 7.40 と補題 7.41 を用い, さらに $(t-a)^p \leq (b-a)^p$ に注意すると,

$$|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}})[\mathcal{C}_{N,M}^{\text{DE}}[1]](t)| \leq M_k \|\mathcal{C}_{N,M}^{\text{DE}}[1]\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D}_N)} (b-a)^p C_{d,p} \exp \left[\frac{-\pi\sqrt{2dpN}}{\log(2dN/p)} \right] \quad (7.172)$$

が成り立つ. さらに補題 7.30 より, f と N によらない定数 C_1 によって

$$\|\mathcal{C}_{N,M}^{\text{DE}}[1]\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D}_N)} \leq C_1 \log(N+1) \exp \left[\frac{\pi d_N}{h} \right] = C_1 \log(N+1) \exp \left[\frac{\pi\sqrt{dpN/2}}{\log(2dN/p)} \right] \quad (7.173)$$

と評価できるので, 結局式 (7.171) の右辺の第一項は

$$|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}})[\mathcal{C}_{N,M}^{\text{DE}}[1]](t)| \leq M_k C_1 (b-a)^p C_{d,p} \log(N+1) \exp \left[\frac{-\pi\sqrt{dpN/2}}{\log(2dN/p)} \right] \quad (7.174)$$

と評価できる. 一方, 補題 7.5 (もしくは補題 7.15) の結果より, 一般に $f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\cdot))$ が $\mathscr{D}_d$ で正則かつ $\overline{\mathscr{D}_d}$ で連続であって, かつ f が端点 b で正則であれば, 任意の $t \in [a, b]$ に対し

$f(\psi_{a,t}^{\text{DE}}(\cdot))$ は $\mathcal{D}_d$ で正則かつ $\overline{\mathcal{D}_d}$ で連続であることが言える. したがって, 式 (7.171) の右辺の第二項は f と N によらない定数 C_2, C_3 によって

$$|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}})[\omega_a](t)| \leq C_2 \exp \left[\frac{-2\pi dN}{\log(2dN/p)} \right], \quad (7.175)$$

$$|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}})[\omega_b](t)| \leq C_3 \exp \left[\frac{-2\pi dN}{\log(2dN/p)} \right] \quad (7.176)$$

と評価できる. これらの収束は $|(\mathcal{A} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}})[\mathcal{C}_{N,M}^{\text{DE}}[1]](t)|$ の収束よりも速い. 以上をまとめれば, 式 (7.170) が成り立つことがわかる. よって補題は示された. ■

ステップ 4. 方程式 (7.148) が一意可解であれば方程式 (7.149) は一意可解

次の補題が成り立つ. $\mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}} f = \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}} f$ は成り立たないことだけ注意すれば, 証明の方針は補題 5.14 と基本的には同様であるので省略する.

補題 7.42 次の二つは同値である:

- (A) 方程式 (7.148) には一意解 $\tilde{v} \in \mathbf{X}$ が存在する.
- (B) 方程式 (7.149) には一意解 $w \in \mathbf{X}$ が存在する.

さらに, それらの解の間には $w = \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}} \tilde{v}$ と $\tilde{v} = (g + \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}} w)/\lambda$ の関係が成り立つ.

ステップ 5. 方程式 (7.149) が一意可解であれば方程式 (7.150) は一意可解

次の補題が成り立つ. 証明は補題 5.13 と全く同様なので省略する.

補題 7.43 次の二つは同値である:

- (A) 方程式 (7.149) には一意解 $w \in \mathbf{X}$ が存在する.
- (B) 方程式 (7.150) には一意解 $\mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^m$ が存在する.

さらに, 修正した Sinc 選点法の近似解 u_N^{DE} とは $w = u_N^{\text{DE}}$ が成り立つ.

最終ステップ. 定理 7.9 の証明

以上の五つのステップの結果を用いて, 定理 7.9 は次のように証明できる.

証明. 補題 7.37, 7.42, 7.43 の結果より,

$$u - u_N^{\text{DE}} = u - w = u - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}} \tilde{v} = (u - \tilde{u}) + (\tilde{u} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}} \tilde{v}) = (u - \tilde{u}) + \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}} (v - \tilde{v}) \quad (7.177)$$

と変形できるので,

$$\|u - u_N^{\text{DE}}\|_{\mathbf{X}} \leq \|u - \tilde{u}\|_{\mathbf{X}} + \|\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}\|_{\mathbf{X}} \|v - \tilde{v}\|_{\mathbf{X}} \quad (7.178)$$

が成り立つ。まず第一項を評価する。補題 7.36 より、 $(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}\mathcal{A})^{-1}$ が存在して、

$$\begin{aligned} u - \tilde{u} &= (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}\mathcal{A})^{-1}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}\mathcal{A})u - (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}\mathcal{A})^{-1}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}g \\ &= (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}\mathcal{A})^{-1}[\lambda u - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}(\mathcal{A}u + g)] \\ &= (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}\mathcal{A})^{-1}[\lambda u - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}(\lambda u)] \end{aligned} \quad (7.179)$$

と変形できる。補題 7.36 より $\|(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})}$ は一様有界である。また定理 7.7 より、 $u \in \mathbf{M}_{p,1}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ であることを用いれば、定理 2.31 が適用できるので、結局

$$\begin{aligned} \|u - \tilde{u}\|_{\mathbf{x}} &\leq \|(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})}|\lambda|\|u - \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}u\|_{\mathbf{x}} \\ &\leq C_1|\lambda|C_2 e^{-\pi dN/\log(2dN/p)} \end{aligned} \quad (7.180)$$

とある定数 C_1, C_2 を用いて評価できる。次に第二項を評価する。まず $\|\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}\|_{\mathbf{x}}$ は、補題 5.15 を用いて

$$\|\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \leq \|\mathcal{P}_{N,N}^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \leq C_0 \log(N+1) \quad (7.181)$$

とある定数 C_0 を用いて評価できる。また補題 7.39 より、 $(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}})^{-1}$ が存在して、

$$\begin{aligned} v - \tilde{v} &= (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}})^{-1}(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}})v - (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}})^{-1}g \\ &= (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}})^{-1}[\lambda v - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}v - g] \\ &= (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}})^{-1}[g + A\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}v - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}v - g] \\ &= (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}})^{-1}[(A - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}})\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}v] \end{aligned} \quad (7.182)$$

と変形できる。さらに補題 7.37 より $\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}}v = \tilde{u}$ であるので、

$$\begin{aligned} v - \tilde{v} &= (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}})^{-1}[(A - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}})\tilde{u}] \\ &= (\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}})^{-1}[(A - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}})u + (A - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}})\{\tilde{u} - u\}] \end{aligned} \quad (7.183)$$

と変形できるので、

$$\begin{aligned} \|v - \tilde{v}\|_{\mathbf{x}} &\leq \|(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})}\|(A - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}})u\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \\ &\quad + \|(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})}\|(A - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}})\{u - \tilde{u}\}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \end{aligned} \quad (7.184)$$

と評価できる。この第一項は、補題 7.39 と、定理 7.13 より $u \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D}) \cap \mathbf{HC}(\mathfrak{D}')$ であることを用いると、

$$\|(\lambda\mathcal{I} - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}\mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \leq C_3 \log(N+1), \quad (7.185)$$

$$\|(A - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}})u\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \leq C_4 e^{-2\pi dN/\log(2dN/p)} \quad (7.186)$$

とある C_3, C_4 を用いてそれぞれ評価できる。また第二項については、

$$\begin{aligned} \|(A - \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}})\{u - \tilde{u}\}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} &\leq (\|A\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} + \|\mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})})\|u - \tilde{u}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x},\mathbf{x})} \\ &\leq (C_5 + C_6)C_1|\lambda|C_2 e^{-\pi dN/\log(2dN/p)} \end{aligned} \quad (7.187)$$

とある C_5, C_6 を用いて評価できる。以上の結果をまとめれば、定理の主張が成り立つことがわかる。 ■

第 8 章

弱特異核を持つ Fredholm 積分方程式に対する Sinc 選点法

本章では、弱特異核を持つ Fredholm 積分方程式 (1.6) に対して岡山 [89] によって提案された Sinc 選点法の改良とその理論解析を行う。まず第 8.1 節でその結果をまとめた後、第 8.2 節で議論すべき点と、改善のアイディアについて述べる。第 8.3 節で具体的に改善したスキームや、理論解析の結果を述べる。第 8.4 節では、本論文の結果が確認できる数値実験結果を示す。第 8.5 節と第 8.6 節は証明である。

8.1 岡山による既存の Sinc 選点法

8.1.1 解 u の性質の解析

まず岡山 [89] は、スキーム導出にあたって必要な、解 u のパラメータを知るために、既知関数 g, k からそのパラメータを調べるための結果を与えた。

定理 8.1 (岡山 [89, 定理 3.11]) 任意の $z, w \in \overline{\mathcal{D}}$ に対し、 $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ かつ $k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ で、 $g \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ とする。また任意の $s \in [a, b]$ に対し $k(\cdot, s)$ と g は区間 $[a, b]$ 上 p 次 Hölder 連続とする。さらに、 $g \equiv 0$ であるときの方程式 (1.6) の解は $u \equiv 0$ のみであるとす。このとき方程式 (1.6) には唯一解 $u \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ が存在し、さらに u は区間 $[a, b]$ 上 p 次 Hölder 連続である。

8.1.2 SE-Sinc 選点法とその誤差解析

ここでは岡山 [89] により導出された、SE 変換を用いた Sinc 選点法 (SE-Sinc 選点法) を説明する。方程式 (1.6) の解 u を $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ かつ区間 $[a, b]$ 上 p 次 Hölder 連続と仮定し、近似解 u_N^{SE} を式 (5.12) で設定する。ただし刻み幅 h は、 N に対して式 (7.2) で定める。 u_N^{SE} の未知係数を求めるために、この u_N^{SE} を方程式 (1.6) に代入し、式 (5.13) の選点 $t = t_i^{\text{SE}}$

上で離散化して、連立 1 次方程式を立てる。ただし、方程式に含まれる積分は、 $s = t$ で

$$\int_a^b |t-s|^{p-1} k(t,s) u(s) ds = \int_a^t (t-s)^{p-1} k(t,s) u(s) ds + \int_t^b (s-t)^{p-1} k(t,s) u(s) ds \quad (8.1)$$

と分割し、一つ目の積分 ($\mathcal{A}u$ と表せる) は前章で述べた通りに $\mathcal{A}u \approx \mathcal{A}_{M,N}^{\text{Ri}} u$ と近似する。刻み幅 $\check{h}$ は式 (7.7) で定め、 M は式 (7.3) で定める。ただし、任意の $t \in [a, b]$ に対し $k(t, \cdot) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ と仮定する。また同様にして、二つめの積分を

$$\mathcal{B}[f](t) = \int_t^b (s-t)^{p-1} k(t,s) f(s) ds \quad (8.2)$$

と表し、これを近似する作用素 $\mathcal{B}_{N,M}^{\text{Ri}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ を

$$\mathcal{B}_{N,M}^{\text{Ri}}[f](t) = (b-t)^p \check{h} \sum_{l=-N}^M \frac{k(t, \psi_{t,b}^{\text{SE}}(l\check{h})) f(\psi_{t,b}^{\text{SE}}(l\check{h}))}{(1 + e^{-l\check{h}})^p (1 + e^{l\check{h}})} \quad (8.3)$$

と定める。ここで作用素 $\mathcal{D} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$, $\mathcal{D}_N^{\text{Ri}} = \mathcal{A}_{M,N}^{\text{Ri}} + \mathcal{B}_{N,M}^{\text{Ri}}$ を導入しておく。 $m = 2N + 3$ とおき、 m 次元ベクトル $\tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{SE}}$ を式 (5.18) で定め、 $m \times m$ 行列 E_m^{SE} を式 (5.16) で、 D_m^{Ri} を

$$D_m^{\text{Ri}} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_N^{\text{Ri}}[\omega_a](a) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{Ri}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot))](a) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{Ri}}[\omega_b](a) \\ \mathcal{D}_N^{\text{Ri}}[\omega_a](t_{-N}^{\text{SE}}) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{Ri}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot))](t_{-N}^{\text{SE}}) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{Ri}}[\omega_b](t_{-N}^{\text{SE}}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{D}_N^{\text{Ri}}[\omega_a](t_N^{\text{SE}}) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{Ri}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot))](t_N^{\text{SE}}) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{Ri}}[\omega_b](t_N^{\text{SE}}) \\ \mathcal{D}_N^{\text{Ri}}[\omega_a](b) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{Ri}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot))](b) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{Ri}}[\omega_b](b) \end{bmatrix} \quad (8.4)$$

で定めると、解くべき連立 1 次方程式は

$$(\lambda E_m^{\text{SE}} - D_m^{\text{Ri}}) \mathbf{u}_m = \tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{SE}} \quad (8.5)$$

と表せる。ただし $\mathbf{u}_m = [u_{-N-1}, u_{-N}, \dots, u_N, u_{N+1}]^\top$ である。この連立 1 次方程式を解いて $\mathbf{u}_m$ を求めれば、式 (5.12) によって近似解 u_N^{SE} が求まる。

岡山 [89] はこのスキームに対して、次の誤差解析を与えた。

定理 8.2 (岡山 [89, 定理 5.5]) 定理 8.1 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたとされているとする。

さらに、

$$\|\mathcal{D} - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{D}\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (8.6)$$

が成り立つとする。このとき、 ϵ を $0 < \epsilon < 1$ をみたす定数とすると、 N に依存せず ϵ に依存する定数 C_ϵ と自然数 N_ϵ が存在し、任意の $N \geq N_\epsilon$ に対して、次の評価が成り立つ：

$$\|u - u_N^{\text{SE}}\|_{\mathbf{X}} \leq C_\epsilon \sqrt{N} e^{-(1-\epsilon)\sqrt{\pi d p N}}. \quad (8.7)$$

8.1.3 DE-Sinc 選点法とその誤差解析

次に、DE 変換を用いた Sinc 選点法 (DE-Sinc 選点法) を説明する。方程式 (1.6) の解 u を $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ かつ区間 $[a, b]$ 上 p 次 Hölder 連続と仮定し、近似解 u_N^{DE} を式 (5.21) で設

定する。ただし刻み幅 h は、 N に対して式 (7.14) で定める。 u_N^{DE} の未知係数を求めるために、この u_N^{DE} を方程式 (1.6) に代入し、式 (5.23) の選点 $t = t_i^{\text{DE}}$ 上で離散化して、連立 1 次方程式を立てる。ただし、方程式に含まれる積分は、 $s = t$ で式 (8.1) のように分割し、一つ目の積分 ($\mathcal{A}u$ と表せる) は前章で述べた通りに $\mathcal{A}u \approx \mathcal{A}_{M,N}^{\text{Mo}} u$ と近似する。刻み幅 $\check{h}$ は式 (7.19) で定め、 M は式 (7.15) で定める。ただし、任意の $t \in [a, b]$ に対し $k(t, \cdot) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ と仮定する。また同様に、 $\mathcal{B}f$ を近似する作用素 $\mathcal{B}_{N,M}^{\text{Mo}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ を

$$\mathcal{B}_{N,M}^{\text{Mo}}[f](t) = (b-t)^p \check{h} \sum_{l=-N}^M \frac{k(t, \psi_{t,b}^{\text{DE}}(l\check{h})) f(\psi_{t,b}^{\text{DE}}(l\check{h})) \pi \cosh(l\check{h})}{(1 + e^{-\pi \sinh(l\check{h})})^p (1 + e^{\pi \sinh(l\check{h})})} \quad (8.8)$$

と定め、二つ目の積分 $\mathcal{B}u$ は $\mathcal{B}_{N,M}^{\text{Mo}} u$ で近似する。ここで作用素 $\mathcal{D}_N^{\text{Mo}} = \mathcal{A}_{M,N}^{\text{Mo}} + \mathcal{B}_{N,M}^{\text{Mo}}$ を導入しておく。 m 次元ベクトル $\tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{DE}}$ を式 (5.27) で定め、 $m \times m$ 行列 E_m^{DE} を式 (5.25) で、 D_m^{Mo} を

$$D_m^{\text{Mo}} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_N^{\text{Mo}}[\omega_a](a) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{Mo}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot))](a) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{Mo}}[\omega_b](a) \\ \mathcal{D}_N^{\text{Mo}}[\omega_a](t_{-N}^{\text{DE}}) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{Mo}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot))](t_{-N}^{\text{DE}}) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{Mo}}[\omega_b](t_{-N}^{\text{DE}}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{D}_N^{\text{Mo}}[\omega_a](t_N^{\text{DE}}) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{Mo}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot))](t_N^{\text{DE}}) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{Mo}}[\omega_b](t_N^{\text{DE}}) \\ \mathcal{D}_N^{\text{Mo}}[\omega_a](b) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{Mo}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot))](b) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{Mo}}[\omega_b](b) \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

で定めると、解くべき連立 1 次方程式は

$$(\lambda E_m^{\text{DE}} - D_m^{\text{Mo}}) \mathbf{u}_m = \tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{DE}} \quad (8.10)$$

と表せる。ただし $\mathbf{u}_m = [u_{-N-1}, u_{-N}, \dots, u_N, u_{N+1}]^\top$ である。この連立 1 次方程式を解いて $\mathbf{u}_m$ を求めれば、式 (5.21) によって近似解 u_N^{DE} が求まる。

岡山 [89] はこのスキームに対して、次の誤差解析を与えた。

定理 8.3 (岡山 [89, 定理 5.6]) 定理 8.1 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする。さらに、

$$\|\mathcal{D} - \mathcal{P}_N^{\text{DE}} \mathcal{D}\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (8.11)$$

が成り立つとする。このとき、 ϵ を $0 < \epsilon < 1$ をみたす定数とすると、 N に依存せず ϵ に依存する定数 C_ϵ と自然数 N_ϵ が存在し、任意の $N \geq N_\epsilon$ に対して、次の評価が成り立つ：

$$\|u - u_N^{\text{DE}}\|_{\mathbf{X}} \leq C_\epsilon e^{-\pi d(1-\epsilon)N / \log(2dN/p)}. \quad (8.12)$$

8.2 岡山の既存の結果に関する議論と改良のアイデア

上述した岡山 [89] による結果には、実装上、および理論解析の観点から、改良の余地がある。本節ではそれらをまとめた上、次節で与える改良方法のアイデアを示す。

8.2.1 近似の際に関数に対して課す仮定について（スキームの導出に関連）

解 u の近似に対して

岡山 [89] は、解 u を近似する際に、 $u \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ かつ（実軸上で） p 次 Hölder 連続と仮定している。この場合、誤差解析の定理 8.2 や定理 8.3 のように、 ϵ の分だけ収束のオーダーが少し遅く評価される。このような仮定をおいた理由としては、 $u \in \mathbf{M}_p(\mathcal{D})$ （複素平面上の Hölder 連続性）は示すことが困難であったが、実軸上の p 次 Hölder 連続性は示すことが可能であったため、という技術的な理由が大きい。本論文では実際に $u \in \mathbf{M}_p(\mathcal{D})$ となることを §8.3.1 で示し、スキームの導出の際は $u \in \mathbf{M}_p(\mathcal{D})$ を仮定する。それにより、誤差解析の際には ϵ が不必要になる。

積分の近似に対して

岡山 [89] は、前章で述べたような、変数変換が t に依存している場合に生じる問題を考慮しており、 $\mathcal{A}$ の近似の際に必要な補題 7.4 や 7.5 に加え、 $\mathcal{B}$ の近似の際に必要な次のような補題を示している。

補題 8.4 (岡山 [89, 補題 4.21]) t は区間 $[a, b]$ 上の実数、 z を区間 $[a, b]$ 上にない複素数とし、 $\zeta(t) = \{\psi_{t,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(z)$ とおく。このとき、 $|\text{Im } \zeta(t)|$ は t に関して単調減少である。

補題 8.5 (岡山 [89, 補題 4.30]) t は区間 $[a, b]$ 上の実数、 z を区間 $[a, b]$ 上にない複素数とし、 $\zeta(t) = \{\psi_{t,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(z)$ とおく。このとき、 $|\text{Im } \zeta(t)|$ は t に関して単調減少である。

ただし、注意 7.6 でも述べたような、DE 変換の場合における端点での正則性の仮定の必要性までは考慮していない。また $\mathcal{A}$ だけを近似していた前章とは異なり、本章では $\mathcal{B}$ の近似も行うので、端点 b だけでなく a での正則性も仮定する必要がある（この意味で定理 8.3 は誤りである）。そのため本論文では、論理の正確さを期すため、DE 変換の場合は両端点での正則性も仮定して議論を進める。ただし、第 1 章でも述べたように、弱特異核を持つ場合は一般には解 u は両端点で特異性を持つことが知られており、その場合についての解析は今後の課題である。

さらに本論文では、刻み幅の決定式を、関数近似と積分近似で統一する。第 7 章における Riley と Mori et al. のスキームと同様に、岡山 [89] はそれぞれ h と $\check{h}$ で異なった定め方をしていたが、前章でも述べたように、刻み幅を関数近似の方に統一すれば、誤差の減少のオーダーは変化しない上に、実装が簡易になるという利点がある。この修正したスキームを §8.3.2 で示す。

8.2.2 収束定理について（論点 2 に関連）

岡山 [89] は定理 8.2 や定理 8.3 において、 $\|\mathcal{D} - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{D}\|_{\mathbf{HC}(\mathcal{D})}$ や $\|\mathcal{D} - \mathcal{P}_N^{\text{DE}} \mathcal{D}\|_{\mathbf{HC}(\mathcal{D})}$ が 0 に収束することを仮定（予想）していたが、これを定理 8.1 の仮定の下で示すことは困難であ

り，自然な仮定であるとは言えない．本論文では， $u \in \mathbf{M}_p(\mathcal{D})$ となる仮定の下で，スキームの可解性や収束性を示す．これらの証明を §8.6 で行う．

8.3 主結果：Sinc 選点法の改良とその理論解析

8.3.1 解 u の性質の解析

本論文では，方程式 (1.6) の解 u が，一般化 Sinc 関数近似に適した空間 $\mathbf{M}_p(\mathcal{D})$ に属する条件について，次のような結果を得た．証明は第 8.5 節で与える．

定理 8.6 関数 k は，任意の $z, w \in \overline{\mathcal{D}}$ に対し $k(\cdot, w) \in \mathbf{M}_p(\mathcal{D})$ かつ $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ をみたすとし，関数 g は， $g \in \mathbf{M}_p(\mathcal{D})$ をみたすとする．さらに， $g \equiv 0$ であるときの方程式 (1.6) の解は $u \equiv 0$ のみであるとする．このとき，方程式 (1.6) には唯一解 $u \in \mathbf{M}_p(\mathcal{D})$ が存在する．

この定理は，既知関数 g と k を調べることで，未知関数 u のパラメータ d が求まることを示している．

8.3.2 修正した Sinc 選点法とその誤差解析

修正 SE-Sinc 選点法とその誤差解析

ここでは，本論文で修正を行った SE-Sinc 選点法的具体形を示し，その誤差解析結果を述べる．繰り返しになるが，主な修正点は u に仮定する条件と，積分近似の際の刻み幅の決定法（関数近似と同じ決定式を用いる）である．

解 u は $u \in \mathbf{M}_p(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ であるとし，近似解 u_N^{SE} を式 (5.12) で設定する．ただし刻み幅 h は， N に対して式 (7.2) で定める． u_N^{SE} の未知係数を求めるために，この u_N^{SE} を方程式 (1.6) に代入し，式 (5.13) の選点 $t = t_i^{\text{SE}}$ 上で離散化して，連立 1 次方程式を立てる．ただし，方程式に含まれる積分は， $s = t$ で式 (8.1) のように分割した後，任意の $t \in [a, b]$ に対し $k(t, \cdot) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ と仮定して，一つ目の積分は $Au \approx \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} u$ のように近似する．ただし刻み幅 h と M はそれぞれ式 (7.2) と式 (7.3) で定める．また同様にして，二つ目の積分を近似する作用素 $\mathcal{B}_{N,M}^{\text{SE}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ を

$$\mathcal{B}_{N,M}^{\text{SE}}[f](t) = (b-t)^p h \sum_{l=-N}^M \frac{k(t, \psi_{t,b}^{\text{SE}}(lh)) f(\psi_{t,b}^{\text{SE}}(lh))}{(1 + e^{-lh})^p (1 + e^{lh})} \quad (8.13)$$

と定め， $\mathcal{B}u$ は $\mathcal{B}_{N,M}^{\text{SE}} u$ で近似する．ここで作用素 $\mathcal{D}_N^{\text{SE}} = \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} + \mathcal{B}_{N,M}^{\text{SE}}$ を導入しておく． m

次元ベクトル $\tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{SE}}$ を式 (5.18) で定め、 $m \times m$ 行列 E_m^{SE} を式 (5.16) で、 D_m^{SE} を

$$D_m^{\text{SE}} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_N^{\text{SE}}[\omega_a](a) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{SE}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot))](a) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{SE}}[\omega_b](a) \\ \mathcal{D}_N^{\text{SE}}[\omega_a](t_{-N}^{\text{SE}}) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{SE}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot))](t_{-N}^{\text{SE}}) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{SE}}[\omega_b](t_{-N}^{\text{SE}}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{D}_N^{\text{SE}}[\omega_a](t_N^{\text{SE}}) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{SE}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot))](t_N^{\text{SE}}) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{SE}}[\omega_b](t_N^{\text{SE}}) \\ \mathcal{D}_N^{\text{SE}}[\omega_a](b) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{SE}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot))](b) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{SE}}[\omega_b](b) \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

で定めると、解くべき連立 1 次方程式は

$$(\lambda E_m^{\text{SE}} - D_m^{\text{SE}})\mathbf{u}_m = \tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{SE}} \quad (8.15)$$

と表せる。この連立 1 次方程式を解いて $\mathbf{u}_m$ を求めれば、式 (5.12) によって近似解 u_N^{SE} が求まる。

本論文ではここに示したスキームに対し、次の誤差解析結果を得た。証明は §8.6.1 で与える。

定理 8.7 定理 8.6 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする。このときある自然数 N_0 が存在して、 $N \geq N_0$ をみたす任意の自然数 N に対し、連立 1 次方程式 (8.15) は一意可解で、近似誤差は N によらないある定数 C によって、次のように評価できる：

$$\|u - u_N^{\text{SE}}\|_{\mathbf{X}} \leq C\sqrt{N}e^{-\sqrt{\pi d\mu}N}. \quad (8.16)$$

修正 DE-Sinc 選点法とその誤差解析

ここでは、本論文で修正を行った DE-Sinc 選点法的具体形を示し、その誤差解析結果を述べる。繰り返しになるが、主な修正点は u に仮定する条件と、積分近似の際の刻み幅の決定法（関数近似と同じ決定式を用いる）である。

解 u は $u \in \mathbf{M}_p(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ であるとし、近似解 u_N^{DE} を式 (5.21) で設定する。ただし刻み幅 h は、 N に対して式 (7.14) で定める。 u_N^{DE} の未知係数を求めるために、この u_N^{DE} を方程式 (1.6) に代入し、式 (5.23) の選点 $t = t_i^{\text{DE}}$ 上で離散化して、連立 1 次方程式を立てる。ただし、方程式に含まれる積分は、 $s = t$ で式 (8.1) のように分割した後、任意の $t \in [a, b]$ に対し $k(t, \cdot) \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ と仮定して、一つ目の積分は $\mathcal{A}u \approx \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}u$ のように近似する。ただし刻み幅 h と M はそれぞれ式 (7.14) と式 (7.15) で定める。また同様にして、二つ目の積分を近似する作用素 $\mathcal{B}_{N,M}^{\text{DE}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ を

$$\mathcal{B}_{N,M}^{\text{DE}}[f](t) = (b-t)^ph \sum_{l=-N}^M \frac{k(t, \psi_{t,b}^{\text{DE}}(lh))f(\psi_{t,b}^{\text{DE}}(lh))\pi \cosh(lh)}{(1 + e^{-\pi \sinh(lh)})^p(1 + e^{\pi \sinh(lh)})} \quad (8.17)$$

と定め、 $\mathcal{B}u$ は $\mathcal{B}_{N,M}^{\text{DE}}u$ で近似する。ここで作用素 $\mathcal{D}_N^{\text{DE}} = \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}} + \mathcal{B}_{N,M}^{\text{DE}}$ を導入しておく。こ

ここで m 次元ベクトル $\tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{DE}}$ を式 (5.27) で定め, $m \times m$ 行列 E_m^{DE} を式 (5.25) で, D_m^{DE} を

$$D_m^{\text{DE}} = \begin{bmatrix} \mathcal{D}_N^{\text{DE}}[\omega_a](a) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{DE}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot))](a) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{DE}}[\omega_b](a) \\ \mathcal{D}_N^{\text{DE}}[\omega_a](t_{-N}^{\text{DE}}) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{DE}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot))](t_{-N}^{\text{DE}}) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{DE}}[\omega_b](t_{-N}^{\text{DE}}) \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathcal{D}_N^{\text{DE}}[\omega_a](t_N^{\text{DE}}) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{DE}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot))](t_N^{\text{DE}}) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{DE}}[\omega_b](t_N^{\text{DE}}) \\ \mathcal{D}_N^{\text{DE}}[\omega_a](b) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{DE}}[S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot))](b) & \cdots & \mathcal{D}_N^{\text{DE}}[\omega_b](b) \end{bmatrix} \quad (8.18)$$

で定めると, 解くべき連立 1 次方程式は

$$(\lambda E_m^{\text{DE}} - D_m^{\text{DE}})\mathbf{u}_m = \tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{DE}} \quad (8.19)$$

と表せる. この連立 1 次方程式を解いて $\mathbf{u}_m$ を求めれば, 式 (5.21) によって近似解 u_N^{DE} が求まる.

本論文ではここに示したスキームに対し, 次の誤差解析結果を得た. 証明は §8.6.2 で与える.

定理 8.8 定理 8.6 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする. さらに, 任意の $t \in [a, b]$ に対し $k(t, \cdot)u(\cdot)$ は端点 a と b で正則であるとする. このときある自然数 N_0 が存在して, $N \geq N_0$ をみたす任意の自然数 N に対し, 連立 1 次方程式 (8.19) は一意可解で, 近似誤差は N によらないある定数 C によって, 次のように評価できる:

$$\|u - u_N^{\text{DE}}\|_{\mathbf{X}} \leq C \log^2(N+1) e^{-\pi d N / \log(2dN/p)}. \quad (8.20)$$

8.4 数値実験

本節では数値実験結果を示す. 実験の目的は, 岡山 [89] による SE-Sinc 選点法・DE-Sinc 選点法と, 本論文で導出した修正 SE-Sinc 選点法・修正 DE-Sinc 選点法の性能比較を行うこと, そして収束速度の確認である. 実装言語は C++ で, 浮動小数点数には double 型を用いた. 連立 1 次方程式を解くにあたっては LU 分解を用いた. また, 区間は全て $[a, b] = [0, 1]$ である.

8.4.1 解が端点特異性をもつ方程式の場合

まず, 岡山 [89] がとりあげている次の方程式を考える.

例 8.9 (岡山 [89, 例題 6.8]) 次の弱特異核をもつ第二種 Fredholm 積分方程式

$$u(t) - \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{\sqrt{ts}}{\sqrt{|t-s|}} u(s) ds = \frac{1}{5} \sqrt{t}(1-t) \{15 - \sqrt{1-t}(1+4t)\} + \frac{1}{5} (4t-5)t^2, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8.21)$$

を考える. 方程式の解は $u(t) = 3\sqrt{t}(1-t)$ である.

π より少し小さい数として $\pi_m = 3.14$ とおく. 岡山 [89] のスキームでは, 定理 8.1 を用いれば, 既知関数 g, k を調べることで $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi_m}))$ かつ $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi_m/2}))$ と, さらに区間 $[a, b]$ 上 1/2 次 Hölder 連続であることがわかる. そこで SE-Sinc 選点法では $d = \pi_m$ として刻み幅 h を式 (7.2) で, $\check{h}$ を式 (7.7) で定めた. DE-Sinc 選点法では, $d = \pi_m/2$ として刻み幅 h を式 (7.14) で, $\check{h}$ を式 (7.19) で定めた. それに対して本論文のスキームでは, 定理 8.6 を用いれば, 既知関数 g, k を調べることで $u \in \mathbf{M}_{1/2}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi_m}))$ かつ $u \in \mathbf{M}_{1/2}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi_m/2}))$ であることがわかる. そこで修正 SE-Sinc 選点法では $d = \pi_m$ として刻み幅 h を式 (7.2) で定め, 修正 DE-Sinc 選点法では $d = \pi_m/2$ として刻み幅 h を式 (7.14) で定めた. これらの結果を図 8.1 に示す. ただし図中 E_{1001} は, $t_i = a + (b - a)i/1000$ として式 (6.15) で定義される, 等間隔点上における最大誤差である. 修正 SE-Sinc 選点法は元々の岡山 [89] の SE-Sinc 選点法と同等の収束性が, 修正 DE-Sinc 選点法は元々の岡山 [89] の DE-Sinc 選点法と同等の収束性が観察できる. ただし, 本論文で修正したスキームは元々のスキームに比べて数値積分における刻み幅 $\check{h}$ を別途定める必要がなく, 実装が簡単であるという利点と, 定理 8.7 および定理 8.8 で収束性が保証されているという利点がある. 実際にこの収束性は図 8.1 から読み取ることができる.

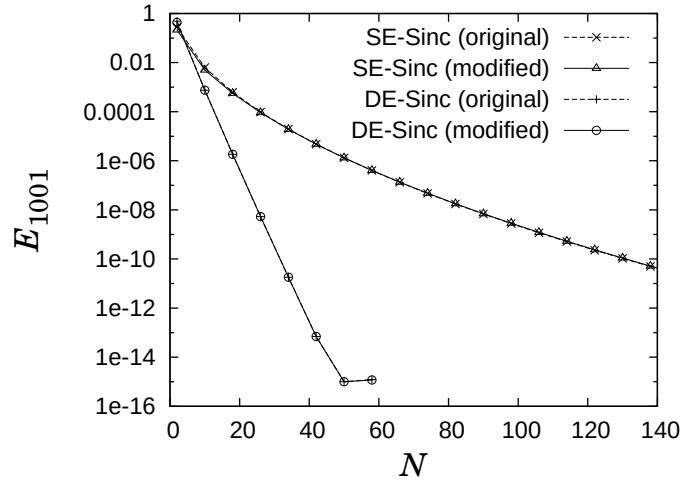


図 8.1 方程式 (8.21) に対する岡山 [89] の SE-Sinc 選点法, 本論文の修正 SE-Sinc 選点法, 岡山 [89] の DE-Sinc 選点法, 本論文の修正 DE-Sinc 選点法の誤差の減少の様子.

8.4.2 解が端点特異性をもたない方程式の場合

次に, 解が端点特異性をもたない場合を考える.

例 8.10 (Ren et al. [115, Example 4]) 次の弱特異核をもつ第二種 Fredholm 積分方程式

$$\begin{aligned} u(t) - \frac{1}{10} \int_0^1 \frac{u(s)}{\sqrt[3]{|t-s|}} ds \\ = t^2(1-t)^2 - \frac{27}{30800} \left[t^{8/3}(54t^2 - 126t + 77) + (1-t)^{8/3}(54t^2 + 18t + 5) \right], \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (8.22)$$

を考える. 方程式の解は $u(t) = t^2(1-t)^2$ である.

今回は $p = 2/3$ であることに注意. 岡山 [89] のスキームでは, 定理 8.1 を用いれば, 既知関数 g, k を調べることで $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi_m}))$ かつ $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi_m/2}))$ と, さらに区間 $[a, b]$ 上 $2/3$ 次 Hölder 連続であることがわかる. そこで SE-Sinc 選点法では $d = \pi_m$ として刻み幅 h を式 (7.2) で, $\check{h}$ を式 (7.7) で定めた. DE-Sinc 選点法では, $d = \pi_m/2$ として刻み幅 h を式 (7.14) で, $\check{h}$ を式 (7.19) で定めた. それに対して本論文のスキームでは, 定理 8.6 を用いれば, 既知関数 g, k を調べることで $u \in \mathbf{M}_{2/3}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi_m}))$ かつ $u \in \mathbf{M}_{2/3}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi_m/2}))$ であることがわかる. そこで修正 SE-Sinc 選点法では $d = \pi_m$ として刻み幅 h を式 (7.2) で定め, 修正 DE-Sinc 選点法では $d = \pi_m/2$ として刻み幅 h を式 (7.14) で定めた. これらの結果を図 8.2 に示す. 修正 SE-Sinc 選点法は元々の岡山 [89] の SE-Sinc 選点法と同等の収束性だが, 修正 DE-Sinc 選点法は元々の岡山 [89] の DE-Sinc 選点法と同等の収束性が観察できる. ただし, 本論文で修正したスキームは元々のスキームに比べて数値積分における刻み幅 $\check{h}$ を別途定める必要がなく, 実装が簡単であるという利点と, 定理 8.7 および定理 8.8 で収束性が保証されているという利点がある. 実際にこの収束性は図 8.2 から読み取ることができる.

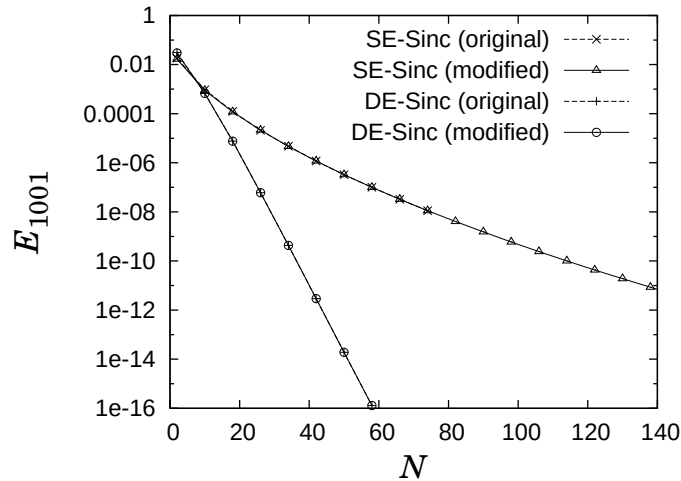


図 8.2 方程式 (8.22) に対する岡山 [89] の SE-Sinc 選点法, 本論文の修正 SE-Sinc 選点法, 岡山 [89] の DE-Sinc 選点法, 本論文の修正 DE-Sinc 選点法の誤差の減少の様子.

8.4.3 多項式近似に基づく方法との比較

最後に次の問題（解は端点特異性をもつ）を考える．

例 8.11 (Vainikko–Vainikko [151]) 次の弱特異核をもつ第二種 Fredholm 積分方程式

$$u(t) - \int_0^1 \frac{u(s)}{\sqrt{|t-s|}} ds = 1 - \frac{\pi}{2} - \sqrt{t} \left[2 + \sqrt{t} \log \left(\frac{1+\sqrt{1-t}}{\sqrt{t}} \right) \right] \\ - \sqrt{1-t} \left[2 + \sqrt{1-t} \log \left(\frac{1+\sqrt{t}}{\sqrt{1-t}} \right) \right], \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (8.23)$$

を考える．方程式の解は $u(t) = 1 + \sqrt{t} + \sqrt{1-t}$ である．

今回は，本論文における修正 SE-Sinc 選点法・修正 DE-Sinc 選点法と，Vainikko–Vainikko [151] による多項式近似を用いた方法を比較する．定理 8.6 を用いれば，既知関数 g, k を調べることで $u \in \mathbf{M}_{1/2}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi_m}))$ かつ $u \in \mathbf{M}_{1/2}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi_m/2}))$ であることがわかる．そこで修正 SE-Sinc 選点法では $d = \pi_m$ として刻み幅 h を式 (7.2) で定め，修正 DE-Sinc 選点法では $d = \pi_m/2$ として刻み幅 h を式 (7.14) で定めた．ただし，今回の方程式の場合は，修正 DE-Sinc 選点法の誤差解析の定理 8.8 の仮定 ($k(t, \cdot)u(\cdot)$ は端点 a と b で正則) がみたされないため，修正 DE-Sinc 選点法の収束はこれまでの数値実験に比べ遅くなることが予想される．

Vainikko–Vainikko [151] は内部で 4 倍精度計算を用いたライブラリを公開しており (<http://www.ut.ee/~eero/WSIE/Fredholm/>)，そのライブラリを $O(m^{-4})$ の収束が得られるパラメータ設定で用いた．同様に，修正 SE-Sinc 選点法・修正 DE-Sinc 選点法も 4 倍精度で計算を行った^{*1}．計算時間を比較するために，ここでは全て Mac OS X, Power Mac G5 2.5 GHz Dual, 4 GB DDR SDRAM の環境で計算を行った．

まず，サンプリング数 m （修正 SE-Sinc 選点法・修正 DE-Sinc 選点法では $m = 2N + 3$ ）に対する誤差の減少の様子を図 8.3 に示す．Vainikko–Vainikko [151] のスキームは直線的（多項式オーダーの収束）なのに対し，修正 SE-Sinc 選点法・修正 DE-Sinc 選点法はいずれも曲線を描いている（指数オーダーの収束）ことが観察される．ただし，図 8.4 に示すように，Vainikko–Vainikko [151] のスキームの計算複雑度は m に対して $O(m^2 \log m)$ であるのに対し，修正 SE-Sinc 選点法・修正 DE-Sinc 選点法はいずれも $O(m^3)$ と大きいため，要求誤差に達するまでの計算時間はいずれが短いかは自明ではない．そこで，計算時間と誤差の関係を示したものを図 8.5 に示す．この図から，要求誤差が高ければ高いほど，修正 SE-Sinc 選点法・修正 DE-Sinc 選点法が有効であることがわかる．

8.5 証明：解 u の性質の解析

ここでは，定理 8.6 の証明を行う．まず，作用素 $\mathcal{D}$ は $\mathbf{HC}(\mathcal{D})$ 上コンパクト作用素となる．

^{*1} PowerPC プロセッサ上で `long double` 型を用いて実現した．

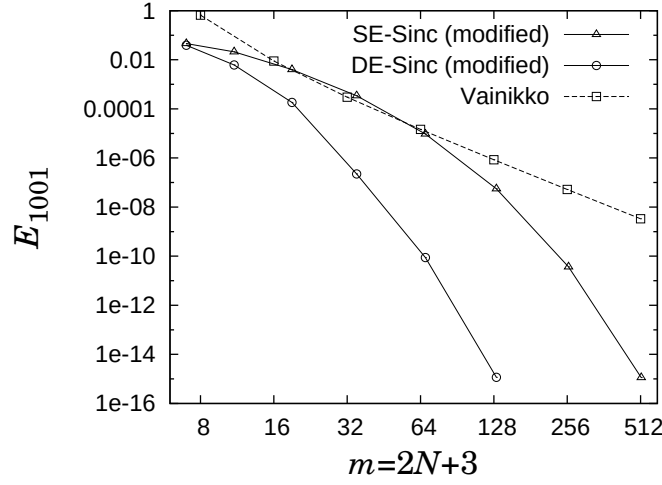


図 8.3 方程式 (8.23) に対する本論文の修正 SE-Sinc 選点法・DE-Sinc 選点法, および Vainikko–Vainikko [151] のスキームの誤差の減少の様子. m は全サンプリング数を表す.

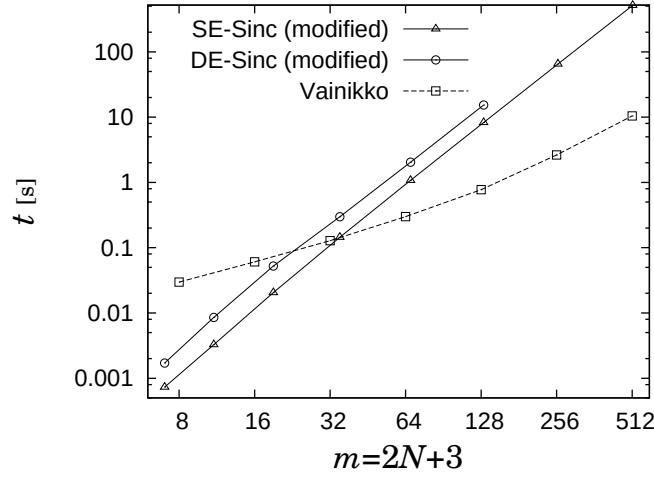


図 8.4 方程式 (8.23) に対する本論文の修正 SE-Sinc 選点法・DE-Sinc 選点法, および Vainikko–Vainikko [151] のスキームのサンプリング数 m に対する計算時間 t の増加の様子.

補題 8.12 (岡山 [89, 補題 3.7]) 任意の $z, w \in \overline{\mathcal{D}}$ に対し, $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ かつ $k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ とする. このとき, $\mathcal{D}$ は $\mathbf{HC}(\mathcal{D})$ 上のコンパクト作用素である.

したがって, Fredholm の択一定理を用いると, まず次のことがわかる.

定理 8.13 (Okayama et al. [100, Theorem 4.2]) 任意の $z, w \in \overline{\mathcal{D}}$ に対し, $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ かつ $k(\cdot, w) \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ とし, また $g \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ とする. さらに, $g \equiv 0$ の場合の方程式 (1.6) の解は $u \equiv 0$ とする. このとき, 方程式 (1.6) には唯一解 $u \in \mathbf{HC}(\mathcal{D})$ が存在する.

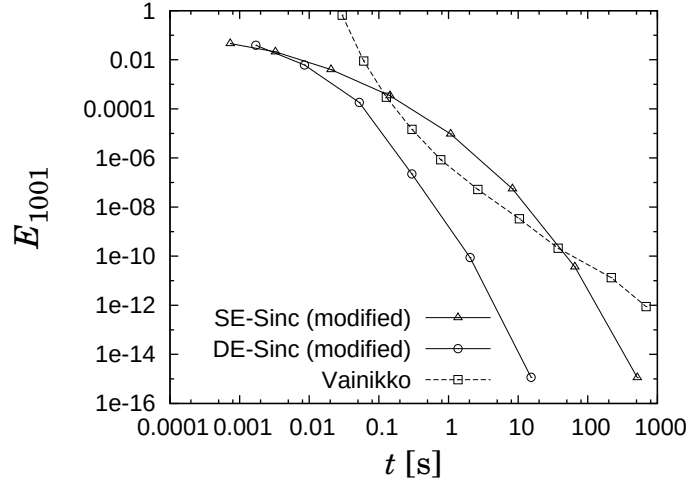


図 8.5 方程式 (8.23) に対する本論文の修正 SE-Sinc 選点法・DE-Sinc 選点法, および Vainikko–Vainikko [151] のスキームの計算時間 t の増加に対する誤差の減少の様子.

よって定理 8.6 を示すには, あと端点における Hölder 連続性を示せばよい. 仮定より $g \in \mathbf{M}_p(\mathfrak{D})$ であるので, あと次の補題を示せば定理 8.6 の証明は完了する.

補題 8.14 (Okayama et al. [100, Lemma 4.4]) 任意の $z, w \in \overline{\mathfrak{D}}$ に対し, $k(z, \cdot) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ かつ $k(\cdot, w) \in \mathbf{M}_p(\mathfrak{D})$ とする. このとき, $f \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ に対して $\mathcal{D}f \in \mathbf{M}_p(\mathfrak{D})$ が成り立つ.

証明. 仮定より $\mathcal{D}f \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ となるのは明らかなので, あと $\mathcal{D}f$ の端点における Hölder 連続性を示せばよい. また, $\mathcal{A}f$ についてのみ示せば, $\mathcal{B}f$ も同様に示され, $\mathcal{D} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ より $\mathcal{D}f$ についても示されたことになる. よって以下では $\mathcal{A}f$ についてのみ示す. まず点 a における Hölder 連続性は, 補題 7.12 の $n = 1$ の場合なので明らかである. よってあと点 b における Hölder 連続性を示せばよい. 積分を以下のように

$$\mathcal{A}[f](z) = \int_a^b (z-s)^{p-1} k(z, s) f(s) ds + \int_b^z (z-w)^{p-1} k(z, w) f(w) dw \quad (8.24)$$

と二つに分割して考える. $\mathcal{A}[f](b)$ から $\mathcal{A}[f](z)$ を差し引くと

$$\begin{aligned} \mathcal{A}[f](b) - \mathcal{A}[f](z) &= \int_a^b (b-s)^{p-1} \{k(b, s) - k(z, s)\} f(s) ds \\ &\quad + \int_a^b \{(b-s)^{p-1} - (z-s)^{p-1}\} k(z, s) f(s) ds \\ &\quad - \int_b^z (z-w)^{p-1} k(z, w) f(w) dw \end{aligned} \quad (8.25)$$

と変形できる. ここで $k(\cdot, s) \in \mathbf{M}_p(\mathfrak{D})$ であることから, 定数 H_k が存在して, 第一項は

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b (b-s)^{p-1} \{k(b, s) - k(z, s)\} f(s) ds \right| &\leq H_k |b-z|^p \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} \int_a^b (b-s)^{p-1} ds \\ &= H_k |b-z|^p \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} \frac{(b-a)^p}{p} \end{aligned} \quad (8.26)$$

と評価できる. また第三項は, 点 a での Hölder 連続性の議論と同様にして

$$\left| \int_b^z (z-w)^{p-1} k(z, w) f(w) dw \right| \leq \frac{M_k \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} c_d}{p} |b-z|^p \quad (8.27)$$

と評価できる. 残る第二項を評価する. まず部分積分によって,

$$\begin{aligned} &\int_a^b \{(b-s)^{p-1} - (z-s)^{p-1}\} k(z, s) f(s) ds \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \left\{ -\frac{(b-s)^p}{p} + \frac{(z-s)^p}{p} \right\} k(z, s) f(s) ds \\ &= \frac{1}{p} (z-b)^p k(z, b) f(b) + \frac{1}{p} \{(b-a)^p - (z-a)^p\} k(z, a) f(a) \\ &\quad + \frac{1}{p} \int_a^b \{(b-s)^p - (z-s)^p\} \frac{\partial}{\partial s} \{k(z, s) f(s)\} ds \end{aligned} \quad (8.28)$$

と変形できる. 関数 $F(z) = z^p$ は p 次 Hölder 連続なので, 定数 H_F が存在して

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{p} (z-b)^p k(z, b) f(b) \right| + \left| \frac{1}{p} \{(b-a)^p - (z-a)^p\} k(z, a) f(a) \right| \\ &\leq \frac{1+H_F}{p} |b-z|^p M_k \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} \end{aligned} \quad (8.29)$$

が成り立つ. また $k(z, \cdot) f(\cdot) \in \mathbf{HC}(\mathfrak{D})$ であるので, 定数 C が存在して

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{p} \int_a^b \{(b-s)^p - (z-s)^p\} \frac{\partial}{\partial s} \{k(z, s) f(s)\} ds \right| &\leq \frac{1}{p} |b-z|^p \int_a^b \left| \frac{\partial}{\partial s} k(z, s) f(s) \right| ds \\ &\leq \frac{1}{p} |b-z|^p C \end{aligned} \quad (8.30)$$

と評価できる. 以上によって, 最終的に

$$|\mathcal{A}[f](b) - \mathcal{A}[f](z)| \leq \frac{H_k \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} (b-a)^p + (c_d + 1 + H_F) M_k \|f\|_{\mathbf{HC}(\mathfrak{D})} + C}{p} |b-z|^p \quad (8.31)$$

と評価できるので, 補題は示された. ■

8.6 証明：スキームの可解性と収束性の解析

8.6.1 修正した SE-Sinc 選点法に対して

ここでは, 定理 8.7 の証明を行う.

証明の流れ

元々の方程式 (1.6) に加えて，次の五つの方程式

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{D}) \tilde{u} = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} g, \quad (8.32)$$

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{D} \mathcal{P}_N^{\text{SE}}) v = g, \quad (8.33)$$

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{D}_N^{\text{SE}} \mathcal{P}_N^{\text{SE}}) \tilde{v} = g, \quad (8.34)$$

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{D}_N^{\text{SE}}) w = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} g, \quad (8.35)$$

$$(\lambda E_m^{\text{SE}} - D_m^{\text{SE}}) c_m = \tilde{g}_m^{\text{SE}} \quad (8.36)$$

を考えて，次のステップで解析を進める：

1. 十分大きな N では方程式 (8.32) は一意可解（補題 8.17）.
2. 方程式 (8.32) が一意可解であれば方程式 (8.33) は一意可解（補題 8.18）.
3. 方程式 (8.33) が一意可解であれば十分大きな N では方程式 (8.34) は一意可解（補題 8.20）.
4. 方程式 (8.34) が一意可解であれば方程式 (8.35) は一意可解（補題 8.21）.
5. 方程式 (8.35) が一意可解であれば方程式 (8.36) は一意可解（補題 8.22）.

最後にこれらの補題をまとめて，定理 8.7 を示す．

ステップ 1. 十分大きな N では方程式 (8.32) は一意可解

まず，元の方程式 (1.6) の解の存在と一意性は，次のように古くより知られている．

定理 8.15 $k \in C([a, b] \times [a, b])$ とする．さらに $g \equiv 0$ のときの方程式 (1.6) の解は $u \equiv 0$ であるとする．このとき，作用素 $(I - \mathcal{D}) : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ は有界な逆作用素 $(I - \mathcal{D})^{-1} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{X}$ を持つ．さらに $g \in \mathbf{X}$ であれば，方程式 (1.6) には唯一解 $u \in \mathbf{X}$ が存在する．

この結果より，もし， $N \rightarrow \infty$ で $\|\mathcal{D} - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{D}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \rightarrow 0$ となることが示されれば，Banach の摂動定理より，ある N 以上では $(I - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{D})$ も有界な逆作用素を持つので，方程式 (8.32) は一意可解であることが言える．実際に次の補題が成り立つ．証明は補題 7.24 と同様にできるので省略する．

補題 8.16 補題 7.23 の仮定がみたされているとする．このとき，ある自然数 N_0 と， N に依存しない定数 $C_{\mathcal{D}}$ が存在して， $N \geq N_0$ をみたす任意の N に対し

$$\|\mathcal{D} - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{D}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \leq C_{\mathcal{D}} \frac{h^p}{\log(1/h)} \quad (8.37)$$

と評価できる．ただし h は式 (7.2) で定められたものとする．

定理 8.6 の仮定の下でこの補題の仮定は明らかに成り立つ．よって $\|\mathcal{D} - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{D}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \rightarrow 0$ となることが示されたので，Banach の摂動定理より，次の補題が成り立つ．

補題 8.17 定理 8.6 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする. このときある自然数 N_0 が存在して, $N \geq N_0$ をみたす任意の自然数 N に対し, 方程式 (8.32) は一意可解で, また $\|(\lambda I - \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \mathcal{D})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ は N に対し一様に有界である.

ステップ 2. 方程式 (8.32) が一意可解であれば方程式 (8.33) は一意可解

補題 7.26 を用いると, 次の補題が成り立つ. 証明は補題 7.27 と同様に行えるので省略する.

補題 8.18 方程式 (8.32) が一意可解であれば方程式 (8.33) は一意可解であり, またそれらの解の間には $v = (g + \mathcal{D}\tilde{u})/\lambda$, $\tilde{u} = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} v$ の関係が成り立つ. さらに N によらない定数 C が存在して, 次の不等式が成り立つ:

$$\|(\lambda I - \mathcal{D}\mathcal{P}_N^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \leq C \log(N+1). \quad (8.38)$$

ステップ 3. 方程式 (8.33) が一意可解であれば十分大きな N では方程式 (8.34) は一意可解

ここでも, Banach の摂動定理を用いることを考える. 今回の場合に適用するには,

$$\|(\lambda I - \mathcal{D}\mathcal{P}_N^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \|(\mathcal{D} - \mathcal{D}_N^{\text{SE}})\mathcal{P}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \rightarrow 0 \quad (N \rightarrow \infty) \quad (8.39)$$

を示す必要がある. 補題 8.18 において, $\|(\lambda I - \mathcal{D}\mathcal{P}_N^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ は $\log(N+1)$ のオーダーで評価されているので, $\|(\mathcal{D} - \mathcal{D}_N^{\text{SE}})\mathcal{P}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ はその増大を抑制して 0 に収束可能なオーダーで評価せねばならない. ここでは, 次のように評価を与える.

補題 8.19 定理 8.6 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする. このとき N に依存しない定数 C が存在して, 次のような評価が成り立つ:

$$\|(\mathcal{D} - \mathcal{D}_N^{\text{SE}})\mathcal{P}_N^{\text{SE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \leq C \log(N+1) e^{-\sqrt{\pi d p N}}. \quad (8.40)$$

証明. 補題 7.28 における $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}}$ に対する証明を, $\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}_{N,M}^{\text{SE}}$ に対しても再現すればよい. これらの結果より $\mathcal{D} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ と $\mathcal{D}_N^{\text{SE}} = \mathcal{A}_{M,N}^{\text{SE}} + \mathcal{B}_{N,M}^{\text{SE}}$ に対しては自明である. ■

この補題を用いれば, 次の補題が成り立ち, このステップ 3 の目標は達成される. 証明は補題 7.29 と同様であるので省略する.

補題 8.20 定理 8.6 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする. さらに, 方程式 (8.33) が一意可解であるとする. このときある自然数 N_0 が存在して, $N \geq N_0$ をみたす任意の自然数 N に対し, 方程式 (8.34) は一意可解である. さらに N によらない定数 C が存在して, 次の不等式が成り立つ:

$$\|(\lambda I - \mathcal{D}_N^{\text{SE}} \mathcal{P}_N^{\text{SE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \leq C \log(N+1). \quad (8.41)$$

ステップ 4. 方程式 (8.34) が一意可解であれば方程式 (8.35) は一意可解

次の補題が成り立つ. $\mathcal{D}_N^{\text{SE}} \mathcal{P}_N^{\text{SE}} f = \mathcal{D}_N^{\text{SE}} f$ は成り立たないことだけ注意すれば, 証明の方針は補題 6.9 と基本的には同様であるので省略する.

補題 8.21 次の二つは同値である：

- (A) 方程式 (8.34) には一意解 $\tilde{v} \in \mathbf{X}$ が存在する.
- (B) 方程式 (8.35) には一意解 $w \in \mathbf{X}$ が存在する.

さらに、それらの解の間には $w = \mathcal{P}_N^{\text{SE}} \tilde{v}$ と $\tilde{v} = (g + \mathcal{D}_N^{\text{SE}} w)/\lambda$ の関係が成り立つ.

ステップ 5. 方程式 (8.35) が一意可解であれば方程式 (8.36) は一意可解

次の補題が成り立つ. 証明は補題 6.8 と全く同様なので省略する.

補題 8.22 次の二つは同値である：

- (A) 方程式 (8.35) には一意解 $w \in \mathbf{X}$ が存在する.
- (B) 方程式 (8.36) には一意解 $\mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^m$ が存在する.

さらに、修正した Sinc 選点法の近似解 u_N^{SE} とは $w = u_N^{\text{SE}}$ が成り立つ.

最終ステップ. 定理 8.7 の証明

以上の五つのステップの結果を用いて、定理 8.7 は定理 7.8 と同様に証明できる. よって証明は完了した.

8.6.2 修正した DE-Sinc 選点法に対して

ここでは、定理 8.8 の証明を行う.

証明の流れ

元々の方程式 (1.6) に加えて、次の五つの方程式

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_N^{\text{DE}} \mathcal{D}) \tilde{u} = \mathcal{P}_N^{\text{DE}} g, \quad (8.42)$$

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{D} \mathcal{P}_N^{\text{DE}}) v = g, \quad (8.43)$$

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{D}_N^{\text{DE}} \mathcal{P}_N^{\text{DE}}) \tilde{v} = g, \quad (8.44)$$

$$(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_N^{\text{DE}} \mathcal{D}_N^{\text{DE}}) w = \mathcal{P}_N^{\text{DE}} g, \quad (8.45)$$

$$(\lambda E_m^{\text{DE}} - D_m^{\text{DE}}) \mathbf{c}_m = \tilde{\mathbf{g}}_m^{\text{DE}} \quad (8.46)$$

を考えて、次のステップで解析を進める：

1. 十分大きな N では方程式 (8.42) は一意可解 (補題 8.24).
2. 方程式 (8.42) が一意可解であれば方程式 (8.43) は一意可解 (補題 8.25).
3. 方程式 (8.43) が一意可解であれば十分大きな N では方程式 (8.44) は一意可解 (補題 8.27).
4. 方程式 (8.44) が一意可解であれば方程式 (8.45) は一意可解 (補題 8.28).
5. 方程式 (8.45) が一意可解であれば方程式 (8.46) は一意可解 (補題 8.29).

最後にこれらの補題をまとめて、定理 8.8 を示す.

ステップ 1. 十分大きな N では方程式 (8.42) は一意可解

SE 変換の場合と同様, 元の方程式 (1.6) の解の存在と一意性 (定理 8.15) を用いる. $N \rightarrow \infty$ で $\|\mathcal{D} - \mathcal{P}_N^{\text{DE}} \mathcal{D}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \rightarrow 0$ となることを示し, Banach の摂動定理を用いればよい. 実際に次の補題が成り立つ. 証明は補題 7.35 と同様にできるので省略する.

補題 8.23 補題 7.23 の仮定がみたされているとする. このとき, ある自然数 N_0 と, N に依存しない定数 $C_{\mathcal{D}}$ が存在して, $N \geq N_0$ をみたす任意の N に対し

$$\|\mathcal{D} - \mathcal{P}_N^{\text{DE}} \mathcal{D}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \leq C_{\mathcal{D}} \frac{h^p}{\log(1/h)} \quad (8.47)$$

と評価できる. ただし h は式 (7.14) で定められたものとする.

よって, Banach の摂動定理より, 補題 8.17 と同様に次の結果が得られる.

補題 8.24 定理 8.6 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする. このときある自然数 N_0 が存在して, $N \geq N_0$ をみたす任意の自然数 N に対し, 方程式 (8.42) は一意可解で, また $\|(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{P}_N^{\text{DE}} \mathcal{D})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ は N に対し一様に有界である.

ステップ 2. 方程式 (8.42) が一意可解であれば方程式 (8.43) は一意可解

補題 7.26 より, 補題 8.18 と同様に次の補題が成り立つ. 証明は SE 変換を DE 変換で置き換えればよい.

補題 8.25 方程式 (8.42) が一意可解であれば方程式 (8.43) は一意可解であり, またそれらの解の間には $v = (g + \mathcal{D}\tilde{u})/\lambda$, $\tilde{u} = \mathcal{P}_N^{\text{DE}} v$ の関係が成り立つ. さらに N によらない定数 C が存在して, 次の不等式が成り立つ:

$$\|(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{D} \mathcal{P}_N^{\text{DE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \leq C \log(N+1). \quad (8.48)$$

ステップ 3. 方程式 (8.43) が一意可解であれば十分大きな N では方程式 (8.44) は一意可解

ここでも, Banach の摂動定理を用いることを考える. 今回の場合に適用するには,

$$\|(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{D} \mathcal{P}_{N,M}^{\text{DE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \|(\mathcal{D} - \mathcal{D}_N^{\text{DE}}) \mathcal{P}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \rightarrow 0 \quad (8.49)$$

を示す必要がある. 補題 8.25 において, $\|(\lambda \mathcal{I} - \mathcal{D} \mathcal{P}_N^{\text{DE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ は $\log(N+1)$ のオーダーで評価されているので, $\|(\mathcal{D} - \mathcal{D}_N^{\text{DE}}) \mathcal{P}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$ はその増大を抑制して 0 に収束可能なオーダーで評価せねばならない. ここでは, 次のように評価を与える.

補題 8.26 定理 8.6 の仮定が $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする. このとき N に依存しない定数 C が存在して, 次のような評価が成り立つ:

$$\|(\mathcal{D} - \mathcal{D}_N^{\text{DE}}) \mathcal{P}_N^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{x})} \leq C \log(N+1) \exp \left[\frac{-\pi \sqrt{dpN/2}}{\log(2dN/p)} \right]. \quad (8.50)$$

証明. 補題 7.38 における $\mathcal{A}$ と $\mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}}$ に対する証明を, $\mathcal{B}$ と $\mathcal{B}_{N,M}^{\text{DE}}$ に対しても再現すればよい. これらの結果より $\mathcal{D} = \mathcal{A} + \mathcal{B}$ と $\mathcal{D}_N^{\text{DE}} = \mathcal{A}_{M,N}^{\text{DE}} + \mathcal{B}_{N,M}^{\text{DE}}$ に対しては自明である. ■

この補題を用いれば, 次の補題が成り立ち, このステップ 3 の目標は達成される. 証明は補題 8.20 の証明において, SE 変換を DE 変換に置き換えればよい.

補題 8.27 定理 8.6 の仮定が $\mathcal{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたされているとする. さらに, 方程式 (8.43) が一意可解であるとする. このときある自然数 N_0 が存在して, $N \geq N_0$ をみたす任意の自然数 N に対し, 方程式 (8.44) は一意可解である. さらに N によらない定数 C が存在して, 次の不等式が成り立つ:

$$\|(\lambda I - \mathcal{D}_N^{\text{DE}} \mathcal{P}_N^{\text{DE}})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \leq C \log(N+1). \quad (8.51)$$

ステップ 4. 方程式 (8.44) が一意可解であれば方程式 (8.45) は一意可解

次の補題が成り立つ. $\mathcal{D}_N^{\text{DE}} \mathcal{P}_N^{\text{DE}} f = \mathcal{D}_N^{\text{DE}} f$ は成り立たないことだけ注意すれば, 証明の方針は補題 6.11 と基本的には同様であるので省略する.

補題 8.28 次の二つは同値である:

- (A) 方程式 (8.44) には一意解 $\tilde{v} \in \mathbf{X}$ が存在する.
- (B) 方程式 (8.45) には一意解 $w \in \mathbf{X}$ が存在する.

さらに, それらの解の間には $w = \mathcal{P}_N^{\text{DE}} \tilde{v}$ と $\tilde{v} = (g + \mathcal{D}_N^{\text{DE}} w)/\lambda$ の関係が成り立つ.

ステップ 5. 方程式 (8.45) が一意可解であれば方程式 (8.46) は一意可解

次の補題が成り立つ. 証明は補題 6.10 と全く同様なので省略する.

補題 8.29 次の二つは同値である:

- (A) 方程式 (8.45) には一意解 $w \in \mathbf{X}$ が存在する.
- (B) 方程式 (8.46) には一意解 $\mathbf{c}_m \in \mathbb{R}^m$ が存在する.

さらに, 修正した Sinc 選点法の近似解 u_N^{DE} とは $w = u_N^{\text{DE}}$ が成り立つ.

最終ステップ. 定理 8.8 の証明

以上の五つのステップの結果を用いて, 定理 8.8 は定理 7.9 と同様に証明できる. よって証明は完了した.

第 9 章

定数を明示的に表した Sinc 数値計算法の基礎定理

本章は、次章に対する準備の章である。第 2 章における Sinc 関数近似・Sinc 積分・Sinc 不定積分の基礎定理では、不等式で現れる定数 C は「 n によらない」ことだけ主張され、具体形は不明の未評価の項であった。本章では、この定数 C の評価を明示的に与える。第 9.1 節で動機を説明し、第 9.2 節で主結果を述べ、第 9.3 節でその数値実験結果を示し、第 9.4 節でその証明を与える。また第 9.5 節では、DE-Sinc 積分を例にとり、より厳しい誤差の上界を得るための戦略について説明する。

9.1 動機：精度保証付き数値計算

これまでの章における数値実験では、真の値や真の解を用いて数値計算の誤差を調べていた。ところが、当然のことながら、実用上においては真の値や解は不明である。そのため、現状では、数値計算によって近似値や近似解を求めたとしても、それらがどの程度真のものに近いのかは直接知ることはいできない。このことは実用化において障害となり得る。

これは Sinc 数値計算法の現状であるが、他の計算法、例えば Gauss 則や Clenshaw-Curtis 則などを用いた数値積分においては、計算値の精度を確認する方法が提案されている [29, 36, 105, 106]。そこでは、あいまいさを含まない不等式で近似誤差を具体的に見積もった上で、丸め誤差を考慮し、全体の誤差を調べている。このように、単に計算を行うだけでなく、計算した値の精度も確かめられる方法を、精度保証付き数値計算と呼ぶ。近年日本においても盛んに研究されており、数値積分だけでなく、関数近似や、連立 1 次方程式・固有値問題・線形計画法などにおいても精度保証付き数値計算の研究が進められている [83, 88]。ごく最近では、二点境界値問題の近似解の精度保証 [143–145] のように、方程式の求解にも研究範囲が広がっている。ただし、Sinc 数値計算法に対しては精度保証の研究は行われていない。

Sinc 数値計算法において精度保証付き数値計算を行うには、まず近似誤差を具体的に見積もる必要があるが、第 2 章における Sinc 関数近似・Sinc 積分・Sinc 不定積分の基礎定理ではその目的には不十分である。これは、不等式で現れる定数 C が具体的に評価されていないた

めである．そこで本章では，既存の定理における定数 C を明示的に評価する．

9.2 主結果：定数を明示的に表した誤差評価

9.2.1 SE-Sinc 関数近似・SE-Sinc 積分・SE-Sinc 不定積分に対する定数を明示的に表した誤差評価

SE-Sinc 関数近似の定理 2.18 に対しては， C は次のように評価できる．

定理 9.1 (Okayama et al. [95, Theorem 2.3]) 定理 2.18 の仮定が成り立つとする．このとき不等式 (2.55) は

$$C = \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta}}{\mu} \left[\frac{2}{\pi d(1 - e^{-2\sqrt{\pi d\mu}})\{\cos(d/2)\}^{\alpha+\beta}} + \sqrt{\frac{\mu}{\pi d}} \right] \quad (9.1)$$

で成り立つ．

また，SE-Sinc 積分の定理 2.19 に対しては， C は次のように評価できる．

定理 9.2 (Okayama et al. [95, Theorem 2.5]) 定理 2.19 の仮定が成り立つとする．このとき不等式 (2.57) は

$$C = \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta-1}}{\mu} \left[\frac{2}{(1 - e^{-\sqrt{2\pi d\mu}})\{\cos(d/2)\}^{\alpha+\beta}} + 1 \right] \quad (9.2)$$

で成り立つ．

注意 9.3 Beighton–Noble [10] によって，（修正した）SE-Sinc 積分の誤差評価がなされているが，その収束次数は刻み幅 h に関して多項式オーダーである．これは，彼らの解析で Euler–Maclaurin の総和公式を用いているからであるが，実際は収束次数は指数オーダーであるべきである．本論文では Stenger [135] による解析法に則り，誤差の指数的減少も保証する解析結果となっている．

さらに，SE-Sinc 不定積分の定理 2.26 に対しては， C は次のように評価できる．

定理 9.4 (Okayama et al. [95, Theorem 2.7]) 定理 2.26 の仮定が成り立つとする．このとき不等式 (2.69) は

$$C = \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta-1}}{\mu} \left[\frac{1}{d(1 - e^{-2\sqrt{\pi d\mu}})\{\cos(d/2)\}^{\alpha+\beta}} \sqrt{\frac{\pi d}{\mu}} + 1.1 \right] \quad (9.3)$$

で成り立つ．

9.2.2 DE-Sinc 関数近似・DE-Sinc 積分・DE-Sinc 不定積分に対する定数を明示的に表した誤差評価

DE-Sinc 関数近似の定理 2.21 に対しては, C は次のように評価できる.

定理 9.5 (Okayama et al. [95, Theorem 2.9]) 定理 2.21 の仮定が成り立つとする. さらに, n は $n \geq (\nu e)/(2d)$ をみたすとする. このとき不等式 (2.60) は

$$C = C_1 \left[\frac{C_2}{1 - e^{-\pi\mu e}} + \mu e^{\frac{\pi}{2}\nu} \right] \quad (9.4)$$

で成り立つ. ただし C_1 と C_2 はそれぞれ

$$C_1 = \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta}}{\pi d\mu}, \quad (9.5)$$

$$C_2 = \frac{2}{\pi \cos^{\alpha+\beta}(\frac{\pi}{2} \sin d) \cos d} \quad (9.6)$$

で定義される定数である.

注意 9.6 刻み幅 h と M, N が正の値となるために必要な条件として, 定理 2.21 では $n > \nu/(2d)$ が仮定されていたが, 定理 9.5 においては, $n \geq (\nu e)/(2d)$ と, さらに厳しい条件になっている. この理由は, $n > \nu/(2d)$ という条件では, $1/\log(2dn/\mu)$ という項の最大値を評価することができないからである. この項は定数 C に現れる (証明の式 (9.38) を参照) ので, 何らかの条件を課してでも評価する必要がある. 本論文では C を評価するために, 右辺を e 倍 (それほど大きくなく, 妥当だと思える値) した $n \geq (\nu e)/(2d)$ という条件を採用し, 問題の項を $1/\log(2dn/\mu) \leq 1/\log(2dn/\nu) \leq 1/\log(e) = 1$ のように評価する.

また, DE-Sinc 積分の定理 2.23 に対しては, C は次のように評価できる.

定理 9.7 (Okayama et al. [95, Theorem 2.11]) 定理 2.23 の仮定が成り立つとする. さらに, n は $n \geq (\nu e)/(4d)$ をみたすとする. このとき不等式 (2.62) は

$$C = \tilde{C}_1 \left[\frac{\tilde{C}_2}{1 - e^{-\frac{\pi}{2}\mu e}} + e^{\frac{\pi}{2}\nu} \right] \quad (9.7)$$

で成り立つ. ただし $\tilde{C}_1$ と $\tilde{C}_2$ はそれぞれ

$$\tilde{C}_1 = \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta-1}}{\mu}, \quad (9.8)$$

$$\tilde{C}_2 = \frac{2}{\cos^{\alpha+\beta}(\frac{\pi}{2} \sin d) \cos d}. \quad (9.9)$$

で定義される定数である.

さらに, DE-Sinc 不定積分の定理 2.27 に対しては, C は次のように評価できる.

定理 9.8 (Okayama et al. [95, Theorem 2.13]) 定理 2.27 の仮定が成り立つとする. さらに, n は $n \geq (\nu e)/(2d)$ をみたすとする. このとき不等式 (2.71) は

$$C = \frac{\tilde{C}_1}{d} \left[\frac{\tilde{C}_2}{2} \frac{1}{1 - e^{-\pi\mu e}} + e^{\frac{\pi}{2}(\alpha+\beta)} \right] \quad (9.10)$$

で成り立つ. ただし $\tilde{C}_1$ と $\tilde{C}_2$ はそれぞれ式 (9.8) と式 (9.9) で定義される定数である.

9.3 数値実験

本節では数値実験結果を示す. 実験の目的は, 本章で得られた誤差評価と実際の誤差との比較である. 実装言語は C 言語で, 浮動小数点数には double 型を用いた. また, 区間は全て $[a, b] = [-1, 1]$ である.

ここでは以下の近似を考える.

例 9.9 (関数の近似) 次の関数

$$f_1(t) = (1+t^2)^{1/2}(1+t)^{1/2}(1-t)^{3/4} \quad (9.11)$$

を考える. この関数は $L = 2$ で $f_1 \in \mathbf{L}_{1/2,3/4}^L(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi/2}))$ かつ $f_1 \in \mathbf{L}_{1/2,3/4}^L(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi/6}))$ をみたす.

例 9.10 (定積分の近似) 次の関数

$$f_2(t) = \frac{1}{2}(1+t^2)^{1/2} + \frac{1}{8}(1+t)^{-1/2} \quad (9.12)$$

の区間 $[-1, 1]$ 上の定積分

$$\int_{-1}^1 f_2(t) dt = \frac{1}{4} \left\{ 2 \operatorname{arcsinh}(1) + 3\sqrt{2} \right\} \quad (9.13)$$

を考える. この関数は $L = 2^{3/4} + 1/8$ で $f_2 Q \in \mathbf{L}_{1/2,1}^L(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{\pi/2}))$ かつ $f_2 Q \in \mathbf{L}_{1/2,1}^L(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{\pi/6}))$ をみたす.

例 9.11 (不定積分の近似) 再び式 (9.12) の関数 f_2 を考え, 区間 $[-1, 1]$ 上の不定積分

$$\int_{-1}^t f_2(s) ds = \frac{1}{4} \left\{ 2^{1/2} + (1+t)^{1/2} + t(1+t^2)^{1/2} + \operatorname{arcsinh}(1) + \operatorname{arcsinh}(t) \right\}. \quad (9.14)$$

を考える.

図 9.1 と図 9.2 は例 9.9 に対する SE-Sinc 関数近似と DE-Sinc 関数近似の計算結果である. それぞれの誤差は, 定理 9.1 と定理 9.5 で評価されているので, それを点線で図中に示した. 実際の誤差は区間 $[-1, 1]$ 上の 1999 個の等間隔点, $t = -0.999, \dots, 0.001, 0, 0.001, \dots, 0.999$ で調べ, その最大誤差を + の点と共に実線で図中に示した. いずれの場合も, 誤差の理論評価値が実際の誤差をきちんと包み込んでいることがわかる.

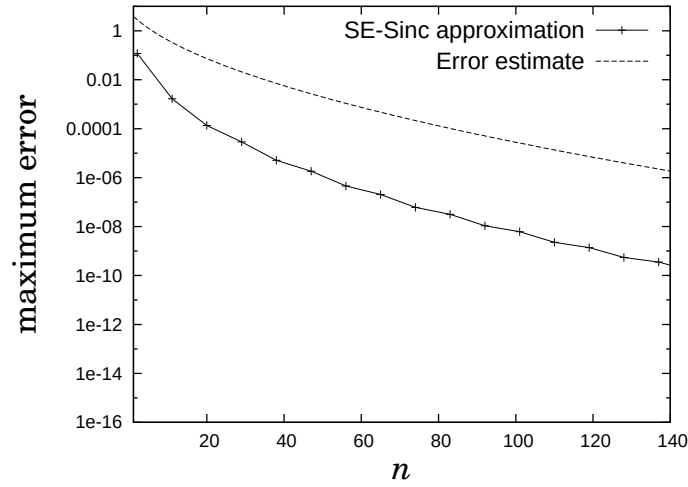


図 9.1 例 9.9 の関数 f_1 に対する SE-Sinc 関数近似の誤差とその理論評価値.

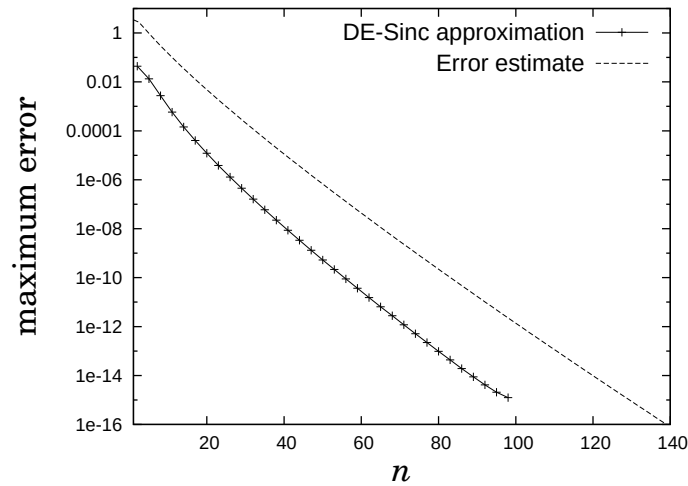


図 9.2 例 9.9 の関数 f_1 に対する DE-Sinc 関数近似の誤差とその理論評価値.

同様に、図 9.3 と図 9.4 は例 9.10 に対する結果を、図 9.5 と図 9.6 は例 9.11 に対する結果を示している。いずれの問題においても、丸め誤差の影響が無視できる状態では、理論評価値は実際の誤差のシャープな上界となっていることがわかる。

9.4 証明

ここでは、第 9.2 節で述べた定理の証明を行う。おおまかな証明の流れは全ての定理で共通しているので、読者の便のために、SE-Sinc 関数近似 (2.37) を例にとり、§9.4.1 で証明の概略を述べる。そこにおいて、誤差項のうちでどの部分が未評価であったのかを明らかにする。その後、§9.4.2 において SE-Sinc 関連の定理の証明を、§9.4.3 において DE-Sinc 関連の定理

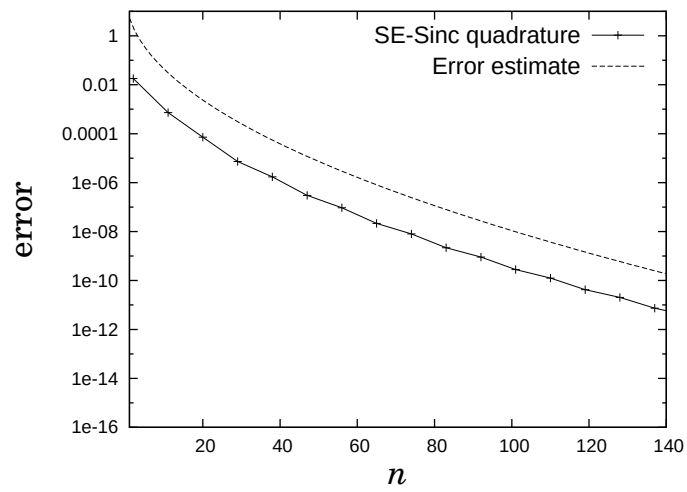


図 9.3 例 9.10 の関数 f_2 に対する SE-Sinc 積分の誤差とその理論評価値.

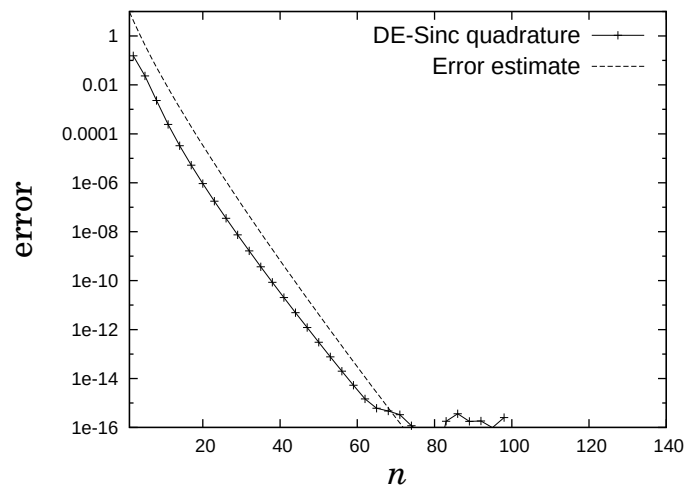


図 9.4 例 9.10 の関数 f_2 に対する DE-Sinc 積分の誤差とその理論評価値.

の証明を行う．最後に § 9.4.4 において，残された補題の証明を行う．

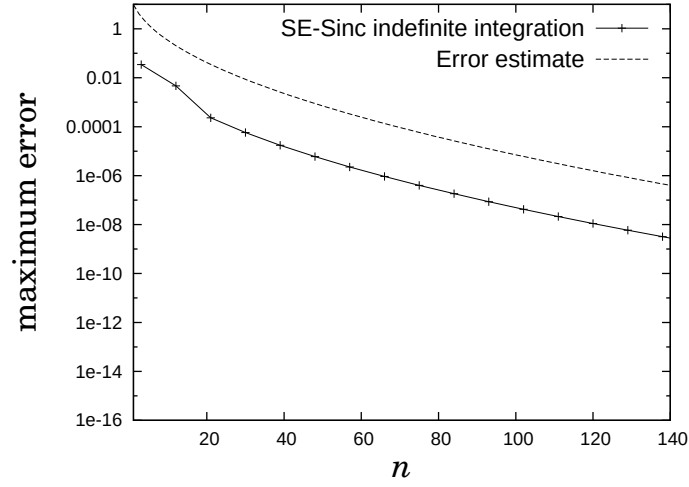


図 9.5 例 9.11 の関数 f_2 に対する SE-Sinc 不定積分の誤差とその理論評価値.

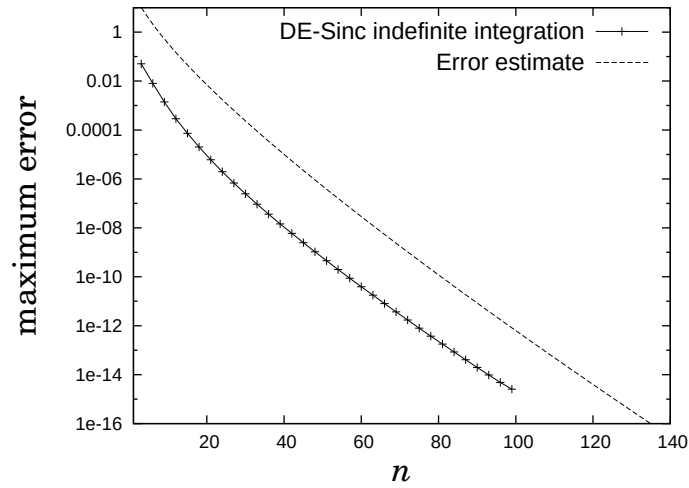


図 9.6 例 9.11 の関数 f_2 に対する DE-Sinc 不定積分の誤差とその理論評価値.

9.4.1 証明の流れ

証明では、「離散化誤差」と「打ち切り誤差」と呼ばれる二つの誤差を評価する. 例えば SE-Sinc 関数近似 (2.37) の場合には, 全体の誤差は

$$\begin{aligned}
 & |f(t) - \mathcal{C}_{M,N}^{\text{SE}}[f](t)| \\
 & \leq \left| f(t) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \right| \\
 & \quad + \left| \sum_{j=-\infty}^{-M-1} f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) + \sum_{j=N+1}^{\infty} f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \right|
 \end{aligned} \tag{9.15}$$

と評価される。右辺の第一項が離散化誤差であり、第二項が打ち切り誤差である。それぞれを順に評価していく。

まず、離散化誤差を評価する。そのために、次のような関数空間を導入する。

定義 9.12 $0 < \epsilon < 1$ をみたす ϵ に対し、長方形の領域 $\mathcal{D}_d(\epsilon)$ を

$$\mathcal{D}_d(\epsilon) = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re} \zeta| < 1/\epsilon, |\operatorname{Im} \zeta| < d(1 - \epsilon)\} \quad (9.16)$$

で定める。このとき、領域 $\mathcal{D}_d$ で正則であつて、かつ次で定めるノルム

$$\mathcal{N}_1(F, d) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \oint_{\partial \mathcal{D}_d(\epsilon)} |F(\zeta)| |d\zeta| \quad (9.17)$$

が有界であるような関数 F 全体を $\mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ と定義する。

$\mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ に属する関数 F に対する Sinc 関数近似の離散化誤差は、定理 2.5 のように評価されており、この定理で $F(x) = f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x))$ とすれば、SE-Sinc 関数近似の離散化誤差を評価することができる。

次に、打ち切り誤差を考える。これについては次のような結果が得られている。

補題 9.13 (Stenger [135, Theorem 4.2.5 の証明の中で示された内容]) $f \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ とする。さらに、 $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ とし、 M と N 式 (2.54) で定めると、次の評価が成り立つ：

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=-\infty}^{-M-1} f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \right| + \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \right| \\ & \leq \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta}}{\mu h} e^{-\mu n h}. \end{aligned} \quad (9.18)$$

定理 2.5 と補題 9.13 では $\mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ と $\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ という異なる関数空間が仮定されているが、次の結果より、 $\mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ のみ仮定すれば十分であることがわかる。

補題 9.14 (Stenger [135, Theorem 4.2.4]) $f \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ とすると、 $f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\cdot)) \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ が成り立つ。

以上の結果をまとめ、刻み幅 h を式 (2.53) で定めると、不等式 (2.55) における定数 C は

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\mathcal{N}_1(f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\cdot)), d)}{\pi d(1 - e^{-2\pi d/h})} + \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta}}{\mu h} \right\} \frac{1}{\sqrt{n}} & \leq \frac{\mathcal{N}_1(f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\cdot)), d)}{\pi d(1 - e^{-2\sqrt{\pi d\mu}})} + \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta}}{\sqrt{\pi d\mu}} \\ & \leq \frac{L\mathcal{N}_1(Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\cdot)), d)}{\pi d(1 - e^{-2\sqrt{\pi d\mu}})} + \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta}}{\sqrt{\pi d\mu}} \end{aligned} \quad (9.19)$$

と評価できる。残る評価すべき項は $\mathcal{N}_1(Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\cdot)), d)$ である。著者の知る限り、この項が明示的に評価された結果はこれまでに報告されていない。本論文における大きな貢献として、この項の評価を次のように与える。証明は §9.4.4 に譲る。

補題 9.15 α と β を正の定数とし, μ を $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ で定め, また d は $0 < d < \pi$ をみたす定数とする. このとき次の評価が成り立つ:

$$\mathcal{N}_1(Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\cdot)), d) \leq \frac{4}{\mu} \left\{ \frac{b-a}{\cos(d/2)} \right\}^{\alpha+\beta}. \quad (9.20)$$

以上で, 望んでいた, 定数を明示的に表した誤差評価が得られる. SE-Sinc 関数近似だけでなく, SE-Sinc 積分 (2.39) と SE-Sinc 不定積分 (2.41) においてもここで評価した項 $\mathcal{N}_1(Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\cdot)), d)$ は共通して現れ, 誤差評価の証明も同様に行うことができる.

DE 変換を用いた場合にも誤差評価は同じように行われる. ここで評価すべき項は, DE-Sinc 関数近似 (2.44) の場合は $\mathcal{N}_1(Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\cdot)), d)$ であり, DE-Sinc 積分 (2.45) と DE-Sinc 不定積分 (2.46) の場合は $\mathcal{N}_1(\cosh(\cdot)Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\cdot)), d)$ であり, それぞれ §9.4.4 において次のような評価を与える (証明は SE 変換を用いた場合よりも非常に煩雑である).

補題 9.16 α と β を正の定数とし, μ を $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ で定め, また d は $0 < d < \pi/2$ をみたす定数とする. このとき次の評価が成り立つ:

$$\mathcal{N}_1(Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\cdot)), d) \leq \mathcal{N}_1(\cosh(\cdot)Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\cdot)), d) \leq \frac{4}{\pi\mu \cos d} \left\{ \frac{b-a}{\cos(\frac{\pi}{2} \sin d)} \right\}^{\alpha+\beta}. \quad (9.21)$$

9.4.2 証明: SE 変換を用いた場合について

定理 9.1 の証明 (SE-Sinc 関数近似 (2.37) に対して)

上述した通り, 定理 9.1 は補題 9.15 と不等式 (9.19) より得られる.

定理 9.2 の証明 (SE-Sinc 積分 (2.39) に対して)

まず, 無限区間における Sinc 積分 (2.30) の離散化誤差は次のように評価されている.

定理 9.17 (Stenger [135, Theorem 3.2.1]) $F \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ とすると, 次の評価が成り立つ:

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx - h \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(jh) \right| \leq \frac{\mathcal{N}_1(F, d)}{1 - e^{-2\pi d/h}} e^{-2\pi d/h}. \quad (9.22)$$

この定理を SE-Sinc 積分に対して適用することを考える. 等式 $Q(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\zeta)) = (b-a)\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(\zeta)$ を用いると, $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ の仮定の下で

$$|f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\zeta))\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(\zeta)| = \frac{1}{b-a} |f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\zeta))Q(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\zeta))| \leq \frac{L}{b-a} |Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\zeta))| \quad (9.23)$$

と評価できる. 補題 9.15 より $\mathcal{N}_1(Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\cdot)), d)$ であることから, この評価より直ちに $f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\cdot))\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(\cdot) \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ であることがわかる. よって $F(x) = f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x))\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(x)$ として定理 9.17 を用いることができ, SE-Sinc 積分の離散化誤差は次のように評価できる.

補題 9.18 $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ とし, $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ とおくと, 次の評価が成り立つ:

$$\left| \int_a^b f(t) dt - h \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \right| \leq \frac{4L(b-a)^{\alpha+\beta-1}}{\mu \cos^{\alpha+\beta}(d/2)} \frac{e^{-2\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}}. \quad (9.24)$$

また, SE-Sinc 積分の打ち切り誤差は次のように評価できる.

補題 9.19 補題 9.18 の仮定が成り立つとする. さらに, M と N を式 (2.54) で定めると, 次の評価が成り立つ:

$$\begin{aligned} & \left| h \sum_{j=-\infty}^{-M-1} f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \right| + \left| h \sum_{j=N+1}^{\infty} f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) \right| \\ & \leq \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta-1}}{\mu} e^{-\mu nh}. \end{aligned} \quad (9.25)$$

証明. 式 (9.23) より, $(b-a)f(\cdot)\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(\cdot)) \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ が成り立つので, 補題 9.13 と同様にしてこの補題も証明される. ■

補題 9.18 と補題 9.19 より, 定理 9.2 が得られる.

定理 9.4 の証明 (SE-Sinc 不定積分 (2.41) に対して)

無限区間の Sinc 不定積分 (2.31) に対する離散化誤差は, 次のように評価されている.

定理 9.20 (Stenger [135, Lemma 3.6.4]) $F \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ とすると, 次の評価が成り立つ:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \int_{-\infty}^x F(\sigma) d\sigma - \sum_{j=-\infty}^{\infty} F(jh) J(j, h)(x) \right| \leq \frac{\mathcal{N}_1(F, d)}{2d(1 - e^{-2\pi d/h})} h e^{-\pi d/h}. \quad (9.26)$$

この定理を用いると, 補題 9.18 の場合と同様に次の補題が成り立つ.

補題 9.21 $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ とし, $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ とおくと, 次の評価が成り立つ:

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in (a, b)} \left| \int_a^t f(s) ds - \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) J(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \right| \\ & \leq \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta-1}}{d\mu \cos^{\alpha+\beta}(d/2)} \frac{h e^{-\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}}. \end{aligned} \quad (9.27)$$

一方打ち切り誤差は, 補題 3.17 と補題 9.19 を用いて, 次のように評価できる.

補題 9.22 補題 9.19 の仮定が成り立つとすると、次の評価が成り立つ：

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=-\infty}^{-M-1} f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) J(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \right| \\ & + \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}'(jh) J(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \right| \leq 1.1 \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta-1}}{\mu} e^{-\mu nh}. \end{aligned} \quad (9.28)$$

補題 9.21 と補題 9.22 を用いると、定理 9.4 が得られる。

9.4.3 証明：DE 変換を用いた場合について

定理 9.5 の証明 (DE-Sinc 関数近似 (2.44) に対して)

補題 9.14 の場合と同様に、補題 9.16 より、 $f \in \mathbf{L}_{\alpha, \beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ ならば $f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\cdot)) \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ である。よって定理 2.5 が使えて、離散化誤差は次のように評価できる。

補題 9.23 $f \in \mathbf{L}_{\alpha, \beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とし、 $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ とおくと、

$$\sup_{t \in (a, b)} \left| f(t) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \right| \leq C_1 C_2 \frac{e^{-\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}} \quad (9.29)$$

が成り立つ。ただし C_1 と C_2 はそれぞれ式 (9.5) と式 (9.6) で定められる定数である。

打ち切り誤差の評価は次の補題のようになる。

補題 9.24 補題 9.23 の仮定が成り立つとする。さらに $\nu = \max\{\alpha, \beta\}$ とおき、 M と N を式 (2.59) で定めると、

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=-\infty}^{-M-1} f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \right| + \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \right| \\ & \leq 2d e^{\frac{\pi}{2}\nu} C_1 \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh)}}{h e^{nh}} \end{aligned} \quad (9.30)$$

が成り立つ。ただし C_1 は式 (9.5) で定められる定数である。

証明. 明らかに任意の $t \in (a, b)$ に対し $|S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t))| \leq 1$ であるので、打ち切り誤差の第一項は

$$\left| \sum_{j=-\infty}^{-M-1} f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \right| \leq \sum_{j=-\infty}^{-M-1} |f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))| \quad (9.31)$$

と評価できる. ここで $f \in \mathbf{L}_{\alpha, \beta}^L(\psi_{a, b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ ならば, 任意の $x \leq 0$ をみたす x に対し

$$\begin{aligned}
 |f(\psi_{a, b}^{\text{DE}}(x))| &\leq LQ_{\alpha, \beta}(\psi_{a, b}^{\text{DE}}(x)) \\
 &= L \frac{(b-a)^{\alpha+\beta}}{(1+e^{-\pi \sinh(x)})^\alpha (1+e^{\pi \sinh(x)})^\beta} \\
 &\leq L(b-a)^{\alpha+\beta} e^{\pi \alpha \sinh(x)} \\
 &\leq L(b-a)^{\alpha+\beta} e^{\frac{\pi}{2} \alpha} e^{-\frac{\pi}{2} \alpha \exp(-x)}
 \end{aligned} \tag{9.32}$$

と評価できるので, 式 (9.31) より続けて

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{j=-\infty}^{-M-1} f(\psi_{a, b}^{\text{DE}}(jh)) \right| &\leq L(b-a)^{\alpha+\beta} e^{\frac{\pi}{2} \alpha} \sum_{j=-\infty}^{-M-1} e^{-\frac{\pi}{2} \alpha \exp(-jh)} \\
 &\leq L(b-a)^{\alpha+\beta} e^{\frac{\pi}{2} \alpha} \int_{-\infty}^{-M} e^{-\frac{\pi}{2} \alpha \exp(-sh)} ds \\
 &\leq \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta} e^{\frac{\pi}{2} \alpha}}{\pi \alpha h e^{Mh}} \int_{-\infty}^{-M} \frac{\pi \alpha h}{2} e^{-sh} e^{-\frac{\pi}{2} \alpha \exp(-sh)} ds \\
 &= \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta} e^{\frac{\pi}{2} \alpha}}{\pi \alpha h e^{Mh}} e^{-\frac{\pi}{2} \alpha \exp(Mh)}
 \end{aligned} \tag{9.33}$$

と評価できる. さらに, $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ や $\nu = \max\{\alpha, \beta\}$ と, 関係式 (2.59) を用いると,

$$\begin{aligned}
 \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta} e^{\frac{\pi}{2} \alpha}}{\pi \alpha h e^{Mh}} e^{-\frac{\pi}{2} \alpha \exp(Mh)} &\leq \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta} e^{\frac{\pi}{2} \nu}}{\pi \mu h e^{nh}} e^{-\frac{\pi}{2} \mu \exp(nh)} \\
 &= d e^{\frac{\pi}{2} \nu} C_1 \frac{e^{-\frac{\pi}{2} \mu \exp(nh)}}{h e^{nh}}
 \end{aligned} \tag{9.34}$$

と評価できる. 第二項も同様にして評価できるので, 補題の主張が成り立つ. ■

以上により, 定理 9.5 は次のように示される.

証明. 補題 9.23 と 9.24 より,

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \in (a, b)} \left| f(t) - \sum_{j=-M}^N f(\psi_{a, b}^{\text{DE}}(jh)) S(j, h) (\{\psi_{a, b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \right| \\
 \leq C_1 \left[C_2 \frac{e^{-\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}} + 2d e^{\frac{\pi}{2} \nu} \frac{e^{-\frac{\pi}{2} \mu \exp(nh)}}{h e^{nh}} \right]
 \end{aligned} \tag{9.35}$$

が成り立つ. 第一項の h に式 (2.58) を代入すれば,

$$\frac{e^{-\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}} = \frac{e^{-\pi dn / \log(2dn/\mu)}}{1 - e^{-\pi \mu (2dn/\mu) / \log(2dn/\mu)}} \leq \frac{e^{-\pi dn / \log(2dn/\mu)}}{1 - e^{-\pi \mu e}} \tag{9.36}$$

と評価できる. ここで関数 $e^{-\pi \mu x / \log x}$ は $x = e$ で最大となることを用いた. 同様に h に

式 (2.58) を代入すると、第二項の n に関する部分は

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh)}}{h e^{nh}} &= \frac{\mu e^{-\pi dn}}{2d \log(2dn/\mu)} \\ &= \frac{\exp\left\{-\frac{\pi\mu}{2}(2dn/\mu)\left(1 - \frac{1}{\log(2dn/\mu)}\right)\right\}}{\log(2dn/\mu)} \frac{\mu}{2d} e^{-\pi dn/\log(2dn/\mu)} \end{aligned} \quad (9.37)$$

と変形できるので、 $n \geq (\nu e)/(2d) \geq (\mu e)/(2d)$ を用いて評価すると、

$$\frac{\exp\left\{-\frac{\pi\mu}{2}(2dn/\mu)\left(1 - \frac{1}{\log(2dn/\mu)}\right)\right\}}{\log(2dn/\mu)} \leq \frac{\exp\left\{-\frac{\pi\mu}{2}(e)\left(1 - \frac{1}{\log(e)}\right)\right\}}{\log(e)} = 1 \quad (9.38)$$

が成り立つ。ここで左辺は単調減少関数であることを用いた。以上の評価より、定理の主張が成り立つ。 ■

定理 9.7 の証明 (DE-Sinc 積分 (2.45) に対して)

まず

$$\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(\zeta) = \frac{\pi}{b-a} \cosh(\zeta) Q(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\zeta)) \quad (9.39)$$

と変形できるので、 $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ の仮定の下で

$$|f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\zeta))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(\zeta)| = \frac{\pi |\cosh(\zeta)|}{b-a} |f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\zeta))Q(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\zeta))| \leq \frac{\pi |\cosh(\zeta)|}{b-a} L|Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\zeta))| \quad (9.40)$$

と評価できる。この評価と補題 9.16 を用いると、 $f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\cdot))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(\cdot) \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ となることからわかる。よって定理 9.17 が使えて、離散化誤差は次のように評価できる。

補題 9.25 $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とし、 $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ とおくと、

$$\left| \int_a^b f(t) dt - h \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) \right| \leq \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \frac{e^{-2\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}} \quad (9.41)$$

が成り立つ。ただし $\tilde{C}_1$ と $\tilde{C}_2$ はそれぞれ式 (9.8) と (9.9) で定められる定数である。

打ち切り誤差の評価は次の補題のようになる。

補題 9.26 補題 9.25 の仮定が成り立つとする。さらに $\nu = \max\{\alpha, \beta\}$ とおき、 M と N を式 (2.59) で定めると、

$$\left| h \sum_{j=-\infty}^{-M-1} f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) \right| + \left| h \sum_{j=N+1}^{\infty} f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) \right| \leq e^{\frac{\pi}{2}\nu} \tilde{C}_1 e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh)} \quad (9.42)$$

が成り立つ。ただし $\tilde{C}_1$ は式 (9.8) で定められる定数である。

証明. 仮定 $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha, \beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ と式 (9.40) より, $x \leq 0$ をみたす任意の x に対し

$$\begin{aligned} |f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(x))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(x)| &\leq \frac{\pi \cosh(x)}{b-a} \frac{L(b-a)^{\alpha+\beta}}{(1+e^{-\pi \sinh(x)})^\alpha (1+e^{\pi \sinh(x)})^\beta} \\ &\leq L(b-a)^{\alpha+\beta-1} \pi \cosh(x) e^{\pi \alpha \sinh(x)} \end{aligned} \quad (9.43)$$

と評価できる. よって打ち切り誤差の第一項は

$$\begin{aligned} \left| h \sum_{j=-\infty}^{-M-1} f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) \right| &\leq h \sum_{j=-\infty}^{-M-1} L(b-a)^{\alpha+\beta-1} \pi \cosh(jh) e^{\pi \alpha \sinh(jh)} \\ &\leq L(b-a)^{\alpha+\beta-1} \int_{-\infty}^{-Mh} \pi \cosh(x) e^{\pi \alpha \sinh(x)} dx \\ &= \frac{L(b-a)^{\alpha+\beta-1}}{\alpha} e^{-\pi \alpha \sinh(Mh)} \\ &\leq \frac{L(b-a)^{\alpha+\beta-1} e^{\frac{\pi}{2}\alpha}}{\alpha} e^{-\frac{\pi}{2}\alpha \exp(Mh)} \end{aligned} \quad (9.44)$$

と評価できる. さらに $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ や $\nu = \max\{\alpha, \beta\}$ と関係式 (2.59) を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{L(b-a)^{\alpha+\beta-1} e^{\frac{\pi}{2}\alpha}}{\alpha} e^{-\frac{\pi}{2}\alpha \exp(Mh)} &\leq \frac{L(b-a)^{\alpha+\beta-1} e^{\frac{\pi}{2}\nu}}{\mu} e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh)} \\ &= \frac{e^{\frac{\pi}{2}\nu} \tilde{C}_1}{2} e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh)} \end{aligned} \quad (9.45)$$

と評価できる. 第二項も同様に評価できるので, 補題の主張が成り立つ. ■

以上より, 定理 9.7 は次のように示すことができる.

証明. 補題 9.25 と 9.26 より,

$$\left| \int_a^b f(t) dt - h \sum_{j=-M}^N f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh) \right| \leq \tilde{C}_1 \left[\tilde{C}_2 \frac{e^{-2\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}} + e^{\frac{\pi}{2}\nu} e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh)} \right]. \quad (9.46)$$

が成り立つ. 第一項の h に式 (2.61) を代入すれば, 不等式 (9.36) と同様に

$$\frac{e^{-2\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}} = \frac{e^{-2\pi dn/\log(4dn/\mu)}}{1 - e^{-\frac{\pi}{2}\mu(4dn/\mu)/\log(4dn/\mu)}} \leq \frac{e^{-2\pi dn/\log(4dn/\mu)}}{1 - e^{-\frac{\pi}{2}\mu e}} \quad (9.47)$$

と評価できる. 第二項の n に関する部分は

$$e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh)} = e^{-2\pi dn} = \exp \left\{ -\frac{\pi\mu}{2}(4dn/\mu) \left(1 - \frac{1}{\log(4dn/\mu)} \right) \right\} e^{-2\pi dn/\log(4dn/\mu)} \quad (9.48)$$

と変形できるので, $n \geq (\nu e)/(4d) \geq (\mu e)/(4d)$ を用いて評価すると

$$\exp \left\{ -\frac{\pi\mu}{2}(4dn/\mu) \left(1 - \frac{1}{\log(4dn/\mu)} \right) \right\} \leq \exp \left\{ -\frac{\pi\mu}{2}(e) \left(1 - \frac{1}{\log(e)} \right) \right\} = 1 \quad (9.49)$$

が成り立つ. ここで左辺は単調減少関数であることを用いた. 以上の評価より, 定理の主張が成り立つ. ■

定理 9.8 の証明 (DE-Sinc 不定積分 (2.46) に対して)

上記において, $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ の仮定より $f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\cdot))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(\cdot) \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ が成り立つことは既に見た. よって離散化誤差は, 定理 9.20 と補題 9.16 を用いて次のように評価される.

補題 9.27 補題 9.25 の仮定が成り立つとする. このとき,

$$\left| \int_a^t f(s) ds - \sum_{j=-\infty}^{\infty} f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh)J(j,h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \right| \leq \frac{\tilde{C}_1 \tilde{C}_2}{2d} \frac{h e^{-\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}} \quad (9.50)$$

が成り立つ. ただし $\tilde{C}_1$ と $\tilde{C}_2$ はそれぞれ式 (9.8) と (9.9) で定められる定数である.

打ち切り誤差については, 補題 3.17 と 9.26 を用いることで, 直ちに次のように評価できる.

補題 9.28 補題 9.26 の仮定が成り立つとする. このとき,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=-\infty}^{-M-1} f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh)J(j,h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \right| \\ & + \left| \sum_{j=N+1}^{\infty} f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh)J(j,h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \right| \leq 1.1 e^{\frac{\pi}{2}\nu} \tilde{C}_1 e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh)} \quad (9.51) \end{aligned}$$

と評価できる. ただし $\tilde{C}_1$ は式 (9.8) で定められる定数である.

以上より, 定理 9.8 は次のように示される.

証明. 補題 9.27 と 9.28 より,

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in (a,b)} \left| \int_a^t f(s) ds - \sum_{j=-M}^N f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(jh)J(j,h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \right| \\ & \leq \tilde{C}_1 \left[\frac{\tilde{C}_2}{2d} \frac{e^{-\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}} + \frac{1.1}{h} e^{\frac{\pi}{2}\nu} e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh)} \right] h. \quad (9.52) \end{aligned}$$

が成り立つ. 第一項については, 不等式 (9.36) が成り立つ. 第二項については,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh)} & \leq e^{\frac{\pi}{2}\mu} e^{-\pi\mu \cosh(nh)} \\ & = e^{\frac{\pi}{2}\mu} \exp \left[-\frac{\pi}{2}\mu \left\{ (2dn/\mu) + \frac{1}{(2dn/\mu)} \right\} \right] \\ & = e^{\frac{\pi}{2}\mu} \exp \left[-\frac{\pi}{2}\mu \left\{ (2dn/\mu) + \frac{1}{(2dn/\mu)} - \frac{(2dn/\mu)}{\log(2dn/\mu)} \right\} \right] e^{-\pi dn / \log(2dn/\mu)} \quad (9.53) \end{aligned}$$

と評価できる. さらに $n \geq (\nu e)/(2d) \geq (\mu e)/(2d)$ を用いると,

$$\frac{1.1}{h} = \frac{1.1\mu}{2d} \times \frac{(2dn/\mu)}{\log(2dn/\mu)} \leq \frac{1.1\mu}{2d} \times e^2 \left\{ (2dn/\mu) + \frac{1}{(2dn/\mu)} - \frac{(2dn/\mu)}{\log(2dn/\mu)} \right\} \quad (9.54)$$

と評価できる. ここで, 関数 g を $g(x) = x e^{-\frac{\pi}{2}\mu x}$ と定めると, この関数は $x = 2/(\pi\mu)$ で最大値をとるので,

$$\begin{aligned}
& \frac{1.1}{h} e^{\frac{\pi}{2}\nu} e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh)} \\
& \leq e^{\frac{\pi}{2}(\mu+\nu)} \frac{1.1\mu}{2d} e^2 \left[g\left((2dn/\mu) + \frac{1}{(2dn/\mu)} - \frac{(2dn/\mu)}{\log(2dn/\mu)}\right) \right] e^{-\pi dn / \log(2dn/\mu)} \\
& \leq e^{\frac{\pi}{2}(\mu+\nu)} \frac{1.1\mu}{2d} e^2 \left[\frac{2}{\pi\mu e} \right] e^{-\pi dn / \log(2dn/\mu)} \\
& = \frac{1.1 e}{\pi} \frac{e^{\frac{\pi}{2}(\mu+\nu)}}{d} e^{-\pi dn / \log(2dn/\mu)} \\
& < \frac{e^{\frac{\pi}{2}(\mu+\nu)}}{d} e^{-\pi dn / \log(2dn/\mu)} \tag{9.55}
\end{aligned}$$

という評価が成り立つ. あと $e^{\frac{\pi}{2}(\mu+\nu)} = e^{\frac{\pi}{2}(\alpha+\beta)}$ を用いれば, 望む評価が得られる. ■

9.4.4 補題 9.15 と 9.16 の証明

ここでは補題 9.15 と 9.16 を示す.

先に補題 9.15 を示す. $Q_{\alpha,\beta}(z) = (z-a)^\alpha(b-z)^\beta$ であったので, 変数変換 $z = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\zeta)$ を適用すると,

$$Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\zeta)) = \frac{(b-a)^{\alpha+\beta}}{(1+e^{-\zeta})^\alpha(1+e^\zeta)^\beta} \tag{9.56}$$

と変形できる. この形より, $\mathcal{N}_1(Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\cdot)), d)$ を評価するには, 次の補題を示すことが本質的である.

補題 9.29 x を任意の実数, y を $|y| < \pi$ をみたす実数とし, $\zeta = x + iy$ とおく. このとき次の評価が成り立つ:

$$\left| \frac{1}{1+e^\zeta} \right| \leq \frac{1}{(1+e^x)\cos(y/2)}, \tag{9.57}$$

$$\left| \frac{1}{1+e^{-\zeta}} \right| \leq \frac{1}{(1+e^{-x})\cos(y/2)}. \tag{9.58}$$

証明. はじめの不等式 (9.57) のみ示せばよい (二つ目の不等式 (9.58) は ζ を $-\zeta$ で置き換えればよい). 不等式

$$\cosh^2(x/2) - \sin^2(y/2) \geq \cosh^2(x/2)\{1 - \sin^2(y/2)\} = \cosh^2(x/2) \cos^2(y/2) \tag{9.59}$$

を用いると,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{1+e^\zeta} \right| &= \frac{e^{-x/2}}{2\sqrt{\cosh^2(x/2) - \sin^2(y/2)}} \leq \frac{e^{-x/2}}{2\cosh(x/2)\cos(y/2)} = \frac{1}{(1+e^x)\cos(y/2)} \\
& \tag{9.60}
\end{aligned}$$

と評価できるので, 補題の主張が成り立つ. ■

この補題より, $\mathcal{N}_1(Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\cdot)), d)$ は次のように評価できる (補題 9.15 の証明).

証明. 補題 9.29 を用いると, 任意の $0 < \epsilon < 1$ をみたす ϵ に対し,

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{-d(1-\epsilon)}^{d(1-\epsilon)} |Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x + iy))| dy \\ & \leq \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(b-a)^{\alpha+\beta}}{(1+e^{-x})^\alpha(1+e^x)^\beta} \int_{-d(1-\epsilon)}^{d(1-\epsilon)} \frac{dy}{\cos^{\alpha+\beta}(y/2)} \\ & = 0 \end{aligned} \quad (9.61)$$

が成り立つ. よって $\mathcal{N}_1(Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\cdot)), d)$ は

$$\mathcal{N}_1(Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\cdot)), d) = \lim_{y \rightarrow d} \int_{-\infty}^{\infty} |Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x + iy))| dx + \lim_{y \rightarrow -d} \int_{-\infty}^{\infty} |Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x + iy))| dx \quad (9.62)$$

と書き換えられる. 再び補題 9.29 を用いると, さらに

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\cdot)), d) & \leq 2 \left\{ \frac{b-a}{\cos(d/2)} \right\}^{\alpha+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+e^{-x})^\alpha(1+e^x)^\beta} \\ & \leq 2 \left\{ \frac{b-a}{\cos(d/2)} \right\}^{\alpha+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+e^{-x})^\mu(1+e^x)^\mu} \\ & = 4 \left\{ \frac{b-a}{\cos(d/2)} \right\}^{\alpha+\beta} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \right\}^\mu dx \\ & \leq 4 \left\{ \frac{b-a}{\cos(d/2)} \right\}^{\alpha+\beta} \int_0^{\infty} e^{-\mu x} dx \\ & = 4 \left\{ \frac{b-a}{\cos(d/2)} \right\}^{\alpha+\beta} \frac{1}{\mu} \end{aligned} \quad (9.63)$$

と評価できる. よって補題は示された. ■

次に補題 9.16 を示す. まず, 関数 $\cosh(\zeta)$ は任意の $x, y \in \mathbb{R}$ に対し

$$|\cosh(x + iy)| = \sqrt{\cosh^2(x) - \sin^2(y)} \leq \cosh(x) \quad (9.64)$$

と評価できる. 補題 9.16 の証明において難しいのは $Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\zeta))$ の評価である. この関数は

$$Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\zeta)) = \frac{(b-a)^{\alpha+\beta}}{(1+e^{-\pi \sinh \zeta})^\alpha(1+e^{\pi \sinh \zeta})^\beta} \quad (9.65)$$

と変形できるので, 評価においては次の補題が本質的である.

補題 9.30 x を任意の実数, y を $|y| < \pi/2$ をみたす実数とし, $\zeta = x + iy$ とおく. このとき次の評価が成り立つ:

$$\left| \frac{1}{1+e^{\pi \sinh \zeta}} \right| \leq \frac{1}{(1+e^{\pi \sinh(x) \cos y}) \cos(\frac{\pi}{2} \sin y)}, \quad (9.66)$$

$$\left| \frac{1}{1+e^{-\pi \sinh \zeta}} \right| \leq \frac{1}{(1+e^{-\pi \sinh(x) \cos y}) \cos(\frac{\pi}{2} \sin y)}. \quad (9.67)$$

この補題の証明は非常に長いため、この節の最後に回す。この補題が成り立つとすれば、補題 9.16 は次のように示される。

証明. 簡便のために、関数 $\Omega(\zeta) = \cosh(\zeta)Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\zeta))$ を導入する。示すべき不等式のうち、 $\mathcal{N}_1(Q_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\cdot)), d) \leq \mathcal{N}_1(\Omega, d)$ は自明のため、補題の証明のためには、 $\mathcal{N}_1(\Omega, d)$ のみ評価すればよい。不等式 (9.64) と補題 9.30 を用いると、任意の $x \in \mathbb{R}$ と $y \in [-d, d]$ に対し

$$\begin{aligned} |\Omega(x + iy)| &\leq \cosh(x) \left\{ \frac{b-a}{\cos(\frac{\pi}{2} \sin y)} \right\}^{\alpha+\beta} \frac{1}{(1 + e^{-\pi \sinh(x) \cos y})^\alpha (1 + e^{\pi \sinh(x) \cos y})^\beta} \\ &\leq \cosh(x) \left\{ \frac{b-a}{\cos(\frac{\pi}{2} \sin y)} \right\}^{\alpha+\beta} \frac{1}{(1 + e^{-\pi \sinh(x) \cos y})^\mu (1 + e^{\pi \sinh(x) \cos y})^\mu} \\ &\leq \cosh(x) \left\{ \frac{b-a}{\cos(\frac{\pi}{2} \sin y)} \right\}^{\alpha+\beta} e^{-\pi \mu \sinh(|x|) \cos y} \end{aligned} \quad (9.68)$$

と評価できる。よって $0 < \epsilon < 1$ をみたす ϵ に対し

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \int_{-d(1-\epsilon)}^{d(1-\epsilon)} |\Omega(x + iy)| dy \leq \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(b-a)^{\alpha+\beta} \cosh(x)}{e^{\pi \mu \sinh(|x|) \cos d(1-\epsilon)}} \int_{-d(1-\epsilon)}^{d(1-\epsilon)} \frac{dy}{\cos^{\alpha+\beta}(\frac{\pi}{2} \sin y)} = 0 \quad (9.69)$$

が成り立つ。したがって、式 (9.62) の場合と同様、 $\mathcal{N}_1(\Omega, d)$ は

$$\mathcal{N}_1(\Omega, d) = \lim_{y \rightarrow d} \int_{-\infty}^{\infty} |\Omega(x + iy)| dx + \lim_{y \rightarrow -d} \int_{-\infty}^{\infty} |\Omega(x + iy)| dx \quad (9.70)$$

と書けることがわかる。さらに不等式 (9.68) を用いると、

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_1(\Omega, d) &\leq 2 \left\{ \frac{b-a}{\cos(\frac{\pi}{2} \sin d)} \right\}^{\alpha+\beta} \int_{-\infty}^{\infty} \cosh(x) e^{-\pi \mu \sinh(|x|) \cos d} dx \\ &= 4 \left\{ \frac{b-a}{\cos(\frac{\pi}{2} \sin d)} \right\}^{\alpha+\beta} \int_0^{\infty} \cosh(x) e^{-\pi \mu \sinh(x) \cos d} dx \\ &= 4 \left\{ \frac{b-a}{\cos(\frac{\pi}{2} \sin d)} \right\}^{\alpha+\beta} \frac{1}{\pi \mu \cos d} \end{aligned}$$

と望む評価が得られる。 ■

最後に、残った補題 9.30 を示す。

証明. 補題 9.29 と同様に、不等式 (9.66) のみ示せばよい。 $y = 0$ の場合は明らかに不等式 (9.66) は成り立つので、以下では $y \neq 0$ とする。まず、関数 $g(x, y)$ を

$$g(x, y) = 1 - \frac{\sin^2(\frac{\pi}{2} \cosh(x) \sin y)}{\cosh^2(\frac{\pi}{2} \sinh(x) \cos y)} \quad (9.71)$$

で定めると、

$$\left| \frac{1}{1 + e^{\pi \sinh(x + iy)}} \right| = \frac{1}{(1 + e^{\pi \sinh(x) \cos y}) \sqrt{g(x, y)}} \quad (9.72)$$

と変形できる. ここで関数 $g(0, y)$ は

$$g(0, y) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \sin y\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \sin y\right) \quad (9.73)$$

と表されることに注意すると, 不等式 (9.66) を示すには, $g(x, y) \geq g(0, y)$ であることを示せば十分である. 関数 g は偶関数であるので, $x \geq 0$ かつ $0 < y < \pi/2$ として考えてよい. 以下では, y をいったん固定して, 各 y に対して $g(x, y) \geq g(0, y)$ が成り立つことを示す. これは, $x_0 = \log((1 + \cos y)/\sin y)$ として, 次の二つを示すことで実現される:

- 1) $0 \leq x \leq x_0$ の範囲では $\frac{\partial}{\partial x} g(x, y) \geq 0$ が成り立つ.
- 2) $x_0 < x$ の範囲では $g(x, y) \geq g(x_0, y)$ が成り立つ.

比較的簡単であるので, 先に二番目を示す. 明らかに

$$\begin{aligned} g(x, y) &= 1 - \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cosh(x) \sin y\right)}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x) \cos y\right)} \\ &\geq 1 - \frac{1}{\cosh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x) \cos y\right)} \\ &= \tanh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x) \cos y\right) \end{aligned} \quad (9.74)$$

が成り立つ. 特に $x = x_0$ のときは等号が成り立つ. 関数 $\tanh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x) \cos y\right)$ は, x に関し単調増加であるので, $x > x_0$ の範囲で

$$g(x, y) \geq \tanh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x) \cos y\right) \geq \tanh^2\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x_0) \cos y\right) = g(x_0, y) \quad (9.75)$$

と評価できる. これで二番目が示された.

次に一番目を示す. ここで, $0 \leq x \leq x_0$ の範囲では $1 \leq \cosh(x) \leq 1/\sin(y)$ であることに注意すると, $g(x, y)$ の微分は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} g(x, y) &= \frac{\pi \sin\left(\frac{\pi}{2} \cosh(x) \sin y\right) \sin\left(\frac{\pi}{2} \cosh(x) \sin(y) + y\right) \sinh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x) \cos(y) + x\right)}{2 \cosh^3\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x) \cos y\right)} \\ &\quad \times \{g_1(x, y) + g_2(x, y)\} \end{aligned} \quad (9.76)$$

と表される. ただし関数 g_1 と g_2 は

$$g_1(x, y) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cosh(x) \sin(y) - y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \cosh(x) \sin(y) + y\right)}, \quad (9.77)$$

$$g_2(x, y) = \frac{\sinh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x) \cos(y) - x\right)}{\sinh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x) \cos(y) + x\right)} \quad (9.78)$$

で定義する. 関数 g に対して $\frac{\partial}{\partial x} g(x, y) \geq 0$ を示すには, 不等式 $g_1(x, y) + g_2(x, y) \geq 0$ を示せばよい. まず, $1 \leq \cosh(x) \leq 1/\sin(y)$ より

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \cosh(x) \sin(y) + y\right) \geq 0, \quad (9.79)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \cosh(x) \sin(y) - y\right) \geq 0, \quad (9.80)$$

$$\sinh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x) \cos(y) + x\right) \geq 0, \quad (9.81)$$

と評価できる. さらに, $\frac{\pi}{2} \cos y \geq 1$ の範囲では

$$\sinh\left(\frac{\pi}{2} \sinh(x) \cos(y) - x\right) \geq 0 \quad (9.82)$$

が成り立つ. よって, $0 < y \leq \arccos(2/\pi)$ の範囲では $g_1(x, y) + g_2(x, y) \geq 0$ が示せた.

以下では $\arccos(2/\pi) < y < \pi/2$ とする. この y の範囲では, $g_1(x, y) + g_2(x, y) \geq 0$ を示すために次の二つを示す:

1a) $\frac{\partial}{\partial x} g_1(x, y) \geq 0$ かつ $\frac{\partial}{\partial x} g_2(x, y) \geq 0$ が成り立つ.

1b) $g_1(0, y) + g_2(0, y) \geq 0$ が成り立つ.

まず 1a) は次のように示される. $g_1(x, y)$ の微分を考えると, 直ちに

$$\frac{\partial}{\partial x} g_1(x, y) = \frac{\pi \sinh(x) \sin(2y) \sin y}{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2} \cosh(x) \sin(y) + y\right)} \geq 0 \quad (9.83)$$

がわかる. $g_2(x, y)$ の微分に対しては, $0 < \frac{\pi}{2} \cos y < 1$ より

$$\frac{\partial}{\partial x} g_2(x, y) = \frac{\left(\frac{\pi}{2} \cos y\right) \cosh(x) \sinh(2x) - \sinh\left(2\left(\frac{\pi}{2} \cos y\right) \sinh x\right)}{\sinh^2\left(\left(\frac{\pi}{2} \cos y\right) \sinh(x) + x\right)} \quad (9.84)$$

$$\geq \left(\frac{\pi}{2} \cos y\right) \frac{\{\cosh(x) \sinh(2x) - \sinh(2 \sinh x)\}}{\sinh^2\left(\left(\frac{\pi}{2} \cos y\right) \sinh(x) + x\right)} \quad (9.85)$$

と評価できる. さらにこの分子を微分すると,

$$\frac{d}{dx} \{\cosh(x) \sinh(2x) - \sinh(2 \sinh x)\} = \cosh(x) \{3 \cosh(2x) - 2 \cosh(2 \sinh x) - 1\} \quad (9.86)$$

となるが, いま x と y は $0 \leq x \leq x_0 = \log((1 + \cos y)/\sin y)$ かつ $\arccos(2/\pi) < y < \pi/2$ をみたすので,

$$0 \leq x \leq \log\left(\frac{1 + \cos y}{\sin y}\right) < \frac{1}{2} \log\left(\frac{\frac{\pi}{2} + 1}{\frac{\pi}{2} - 1}\right) \quad (9.87)$$

が成り立つ. この x の範囲においては,

$$3 \cosh(2x) - 2 \cosh(2 \sinh x) - 1 \geq 0 \quad (9.88)$$

が成り立つので, $\frac{\partial}{\partial x} g_2(x, y) \geq 0$ であることも示された.

証明はあと 1b), すなわち

$$g_1(0, y) + g_2(0, y) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin(y) - y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin(y) + y\right)} + \frac{\frac{\pi}{2} \cos(y) - 1}{\frac{\pi}{2} \cos(y) + 1} \geq 0 \quad (9.89)$$

を示せば完了する. まず明らかに $0 \leq s \leq \pi/2$ で

$$\left(\frac{\pi}{2} + s\right) \sin(s) \geq \frac{\pi}{2} \sin(s) \geq s \quad (9.90)$$

が成り立ち, この不等式より

$$\left(\frac{\pi}{2} - s\right) \left(\frac{\pi}{2} + s\right) \sin(s) \geq \left(\frac{\pi}{2} - s\right) s \geq \cos(s) s \quad (9.91)$$

が得られるので, $0 \leq s \leq \pi/2$ の範囲で

$$2 \sin(s) \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - s^2 \right\} \geq 2s \cos s \quad (9.92)$$

が成り立つ. ここで $s = \frac{\pi}{2} \sin(y)$ とおくと,

$$2 \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin y\right) \left\{ \frac{\pi}{2} \cos y \right\}^2 \geq 2\left(\frac{\pi}{2} \sin y\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin y\right) \quad (9.93)$$

が得られる. この不等式は

$$\left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin y\right) \left(\frac{\pi}{2} \cos y\right) - \left(\frac{\pi}{2} \sin y\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin y\right) \right\} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \cos y\right) + 1 \right\} \quad (9.94)$$

$$\geq - \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{2} \sin y\right) \left(\frac{\pi}{2} \cos y\right) + \left(\frac{\pi}{2} \sin y\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin y\right) \right\} \left\{ \left(\frac{\pi}{2} \cos y\right) - 1 \right\} \quad (9.95)$$

と同値であり, さらに

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin y\right) \left(\frac{\pi}{2} \cos y\right) - \left(\frac{\pi}{2} \sin y\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} \sin y\right) \left(\frac{\pi}{2} \cos y\right) + \left(\frac{\pi}{2} \sin y\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} \sin y\right)} + \frac{\left(\frac{\pi}{2} \cos y\right) - 1}{\left(\frac{\pi}{2} \cos y\right) + 1} \geq 0 \quad (9.96)$$

と同値である. この左辺は $g_1(0, y) + g_2(0, y)$ に他ならない. 以上で証明は完了した. ■

9.5 自然数 n を刻み幅 h に対して定める方法

これまでの章における Sinc 数値計算法の誤差解析では, 刻み幅 h を自然数 n に依存して定めていた. 例えば SE-Sinc 積分の場合には式 (2.56), DE-Sinc 積分の場合には式 (2.61) のように, n に対して h が決定されている. この理由は, 誤差を n の関数として評価したいためである. 計算式の $\sum$ の項数 (= 関数評価回数) はこの n の 1 次関数であるので, n は大雑把には関数評価回数を表すものと考えてよく, 収束速度, つまりその近似公式の性能は, 関数評価回数に対して解析されるのが自然だからである.

ただし, 実用の観点からすると, 収束速度を知ることよりも, 誤差のシャープな上界を得ることに興味がある. そのため, 誤差を n の関数として評価する必要はなく, 誤差をさらに厳しく評価できる場合, 例えば h の関数として評価しても問題は生じない. 実際, DE 変換を用いる場合は, 誤差を h の関数として評価する戦略が有用である. その理由を, 以下では DE-Sinc 積分を例にとって説明する.

DE-Sinc 積分の誤差 (ここでは $E^{\text{DE}}(h, n)$ とおく) は, 既に §9.4.3 でみたように,

$$E^{\text{DE}}(h, n) \leq \tilde{C}_1 \left\{ \tilde{C}_2 \frac{e^{-2\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}} + e^{\frac{\pi}{2}\nu} e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh)} \right\} \quad (9.97)$$

と評価される. 最適な誤差の減少を得るためには, この第一項と第二項は同じオーダーで減少させるべきである. ところが, 定理 2.23 (や定理 9.7) のように, 自然数 n に対して刻み幅 h を式 (2.61) で定めると, 式 (9.97) は

$$E^{\text{DE}}(h, n) \leq \tilde{C}_1 \left\{ \tilde{C}_2 \frac{e^{-2\pi dn / \log(4dn/\mu)}}{1 - e^{-2\pi dn / \log(4dn/\mu)}} + e^{\frac{\pi}{2}\nu} e^{-2\pi dn} \right\} \quad (9.98)$$

となり、第二項の方が減少が速くなってしまふ。実際に double の範囲でも 100 桁以上の違いが出るのが観察されている [158]。これは、刻み幅 h の決定式 (2.61) を定める際に、方程式

$$e^{-2\pi d/h} = e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh)} \quad (9.99)$$

を $h = \dots$ の形で初等関数を用いて解くことはできず、やむを得ず近似的に解いたもので代用しているからである。ところが、方程式 (9.99) は、 $n = \dots$ の形では

$$n = \frac{1}{h} \log \left(\frac{4d}{\mu h} \right) \quad (9.100)$$

のように陽に解くことができる。さらに、より第一項と第二項を同じ値に近づけることを狙い、方程式

$$\tilde{C}_2 e^{-2\pi d/h} = e^{\frac{\pi}{2}\nu} e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh)} \quad (9.101)$$

を考えると、これもやはり

$$n = \frac{1}{h} \log \left\{ \frac{4d}{\mu h} - \frac{2}{\pi\mu} \log \left(\frac{\tilde{C}_2}{e^{\frac{\pi}{2}\nu}} \right) \right\} \quad (9.102)$$

と陽に解くことができる。 h に対してこのように n を定めれば、第一項と第二項はほとんど同じ値になる。実際には、 n は自然数であるので、

$$n = \left\lceil \frac{1}{h} \log \left\{ \frac{4d}{\mu h} - \frac{2}{\pi\mu} \log \left(\frac{\tilde{C}_2}{e^{\frac{\pi}{2}\nu}} \right) \right\} \right\rceil \quad (9.103)$$

と定めることとなるが、この場合にもやはり第一項と第二項はほとんど同じ値になる。このように、 n を刻み幅 h に対して定めた方が、誤差を厳しく評価する観点からは望ましい。

さらに、実用の観点からは、許容誤差 ϵ を与えられたときに、近似値の誤差が ϵ よりも小さくなるようにするための方法も必要である。式 (9.103) のように n を刻み幅 h に対して定める場合は、誤差評価式 (9.97) は

$$E^{\text{DE}}(h, n) \leq \tilde{C}_1 \left\{ \tilde{C}_2 \frac{e^{-2\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}} + \tilde{C}_2 e^{-2\pi d/h} \right\} < \tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \frac{2e^{-2\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}} \quad (9.104)$$

となるので、方程式

$$\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \frac{2e^{-2\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}} = \epsilon \quad (9.105)$$

を解けばよい。よって、この方程式をみたすように、刻み幅 h を

$$h = \frac{2\pi d}{\log(1 + 2\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 / \epsilon)} \quad (9.106)$$

と許容誤差 ϵ に対して定めれば、近似誤差は ϵ よりも小さくなることがわかる。

以上の議論より、次のような結果が得られる。

定理 9.31 (Yamanaka et al. [157, Theorem 1]) $fQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}^L(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とし, $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$, $\nu = \max\{\alpha, \beta\}$ とおく. また $\tilde{C}_1, \tilde{C}_2$ はそれぞれ式 (9.8) と式 (9.9) で定められる定数とする. このとき, 許容誤差 ϵ に対して刻み幅 h を式 (9.106) で定め, 自然数 n を式 (9.103) で定め, 自然数 M と N を式 (2.59) で定めると, 次の評価が成り立つ:

$$|Qf - Q_{M,N}^{\text{DE}}f| < \epsilon. \quad (9.107)$$

ここでは DE-Sinc 積分を例にとって説明したが, この戦略は DE-Sinc 関数近似や DE-Sinc 不定積分など, 他の DE 変換を用いた近似公式にも応用できる.

それに対し, SE 変換を用いた近似公式の場合には, n を刻み幅 h に対して決定する戦略はそれほど有用ではない. その理由を, ここでは SE-Sinc 積分を例にとって説明する. SE-Sinc 積分の誤差 $E^{\text{SE}}(h, n)$ は,

$$E^{\text{SE}}(h, n) \leq \frac{2L(b-a)^{\alpha+\beta-1}}{\mu} \left\{ \frac{2}{\cos^{\alpha+\beta}(d/2)} \frac{e^{-2\pi d/h}}{1 - e^{-2\pi d/h}} + e^{-\mu n h} \right\} \quad (9.108)$$

と評価できる. ここでも, 第一項と第二項を同じオーダーで減少させることを考えると, 方程式

$$e^{-2\pi d/h} = e^{-\mu n h} \quad (9.109)$$

が立つ. そして, 定理 2.19 (や定理 9.2) の刻み幅 h の決定式 (2.56) は, この方程式を厳密にみたすものであり, 同じオーダーで減少させることを既に達成している. 上述のように, 刻み幅 h を n に対して決定することは収束性解析としても自然であるため, n を刻み幅 h に対して決定する戦略は特に意味を持たなくなる. 他の SE 変換を用いた近似公式の場合も, この SE-Sinc 積分と同様の議論になるので, やはり従来通り刻み幅 h を n に対して決定するのがよいと思われる.

第 10 章

Fredholm 積分方程式に対する Sinc-Nyström 法の事前誤差評価と 事後誤差評価

本章では，前章での結果をもとに，第 4 章で述べた Fredholm 積分方程式に対する Sinc-Nyström 法に対し，定数を明示的に表した誤差評価を与える．誤差評価としては事前誤差評価と事後誤差評価の二種類を考える．

10.1 事前誤差評価と事後誤差評価の使い分けの指針

10.2 主結果：Sinc-Nyström 法に対する事前誤差評価と事後誤差評価

第 4.1 節で述べた SE-Sinc-Nyström 法で求めた近似解 u_N^{SE} に対しては，次の誤差評価が成り立つ．

定理 10.1 (岡山ら [97, 定理 5.1]) 関数 k と g は，定理 4.3 の仮定を $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたすとし，定数 C_d^{SE} を

$$C_d^{\text{SE}} = 2 \left[1 + \frac{2}{(1 - e^{-\sqrt{2\pi d}}) \cos^2(d/2)} \right] \quad (10.1)$$

とおく．さらに，任意の $z, w \in \overline{\mathfrak{D}}$ に対し $|k(z, w)| \leq M_k$, $|g(z)| \leq M_g$ とし，数列 λ_N^{SE} と Λ_N^{SE} を

$$\lambda_N^{\text{SE}} = \{1 + M_k(b - a)(1 + \sqrt{\pi d/8})\|(I_m - K_m^{\text{SE}})^{-1}\|_\infty\} M_k^2(b - a)^2 C_d^{\text{SE}}, \quad (10.2)$$

$$\Lambda_N^{\text{SE}} = \frac{M_k(b - a)C_d^{\text{SE}} + \lambda_N^{\text{SE}}}{1 - \lambda_N^{\text{SE}} e^{-\sqrt{2\pi d N}}} \quad (10.3)$$

で定める. このとき, 次の二つの条件式

$$\lambda_N^{\text{SE}} e^{-\sqrt{2\pi d N}} < 1, \quad (10.4)$$

$$\Lambda_N^{\text{SE}} M_k(b-a)(1 + \sqrt{\pi d/8}) e^{-\sqrt{2\pi d N}} < 1 \quad (10.5)$$

が成り立つ N に対し, 連立 1 次方程式 (4.5) は一意可解で, 誤差は

$$\|u - u_N^{\text{SE}}\|_{\mathbf{X}} \leq C e^{-\sqrt{2\pi d N}} \quad (10.6)$$

と評価できる. ここで, $|\lambda_N^{\text{SE}}|$ と $|\Lambda_N^{\text{SE}}|$ は一様有界であり, ある N_0 以上の N では条件式 (10.4) と (10.5) は常に成立し, 上記の定数 C は次のように評価できる:

$$C \leq \Lambda_N^{\text{SE}} \{M_g + M_k(b-a)(1 + \sqrt{\pi d/8})\|u_m^{\text{SE}}\|_{\infty}\}. \quad (10.7)$$

この定理の誤差評価や条件式に現れる項は, 連立 1 次方程式が与えられれば全て計算可能である. また, 評価した誤差が要求精度より大きい場合や, 条件式がみたされない場合は, N を増加 (例えば 2 倍に) して再度計算を行うようにすればよい.

また, 第 4.1 節で述べた DE-Sinc-Nyström 法で求めた近似解 u_N^{DE} に対しては, 次の誤差評価が成り立つ.

定理 10.2 (岡山ら [97, 定理 5.2]) 関数 k と g は, 定理 4.3 の仮定を $\mathfrak{D} = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ としてみたすとし, 定数 C_d^{DE} を

$$C_d^{\text{DE}} = 2 \left[e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{(1 - e^{-\frac{\pi}{2}} e) \cos^2(\frac{\pi}{2} \sin d) \cos d} \right] \quad (10.8)$$

とおく. さらに, 任意の $z, w \in \overline{\mathfrak{D}}$ に対し $|k(z, w)| \leq M_k$, $|g(z)| \leq M_g$ とし, 数列 λ_N^{DE} と Λ_N^{DE} を

$$\lambda_N^{\text{DE}} = \{1 + M_k(b-a)(1 + d/e)\|(I_N - K_m^{\text{DE}})^{-1}\|_{\infty}\} M_k^2(b-a)^2 C_d^{\text{DE}}, \quad (10.9)$$

$$\Lambda_N^{\text{DE}} = \frac{M_k(b-a)C_d^{\text{DE}} + \lambda_N^{\text{DE}}}{1 - \lambda_N^{\text{DE}} e^{-2\pi d N / \log(4dN)}} \quad (10.10)$$

で定める. このとき, 次の二つの条件式

$$\lambda_N^{\text{DE}} e^{-2\pi d N / \log(4dN)} < 1, \quad (10.11)$$

$$\Lambda_N^{\text{DE}} M_k(b-a)(1 + d/e) e^{-2\pi d N / \log(4dN)} < 1 \quad (10.12)$$

が成り立つ N に対し, 連立 1 次方程式 (4.11) は一意可解で, 誤差は

$$\|u - u_N^{\text{DE}}\|_{\mathbf{X}} \leq C e^{-2\pi d N / \log(4dN)} \quad (10.13)$$

と評価できる. ここで, $|\lambda_N^{\text{DE}}|$ と $|\Lambda_N^{\text{DE}}|$ は一様有界であり, ある N_0 以上の N では条件式 (10.11) と (10.12) は常に成立し, 上記の定数 C は次のように評価できる:

$$C \leq \Lambda_N^{\text{DE}} \{M_g + M_k(b-a)(1 + d/e)\|u_m^{\text{DE}}\|_{\infty}\}. \quad (10.14)$$

10.3 数值実験

10.4 証明

第 11 章

おわりに

本論文では、第二種積分方程式 (1.1), (1.2) および (1.5), (1.6) に対する Sinc スキームに対し、大きく分けて二つの論点を取り上げ、改善を行った。また、これまでに提案されていなかった、Volterra 積分方程式 (1.1) と Fredholm 積分方程式 (1.2) に対する DE 変換を用いた Sinc 選点法によるスキームについては、スキームの導出に加えて、同じような二つの論点に対する研究を行った。

論点の一つ目は、方程式 (1.1), (1.2) および (1.5) に対する既存の Sinc スキームは、方程式の解 u の性質を用いて設計されていたことである。解 u が端点で 0 となるか否かで近似解の基底関数を変更したり、解 u が $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ や $u \in \mathbf{HC}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ をみたすと仮定して、このパラメータ d を用いて刻み幅 h を決定したりと、解 u の情報が得られることを前提にしていた。ところが、一般に解 u は未知関数であり、端点の値や、 d の値はユーザーは知ることができないため、既存のスキームの多くは正当に実装することが困難であった。それに対し本論文では、 u の端点の値で基底関数を変更する必要があるようにスキームを修正したり、必要な u のパラメータは既知関数 g, k を調べれば求まることを理論的に示したりすることにより、解 u が未知の場合でもスキームを実行できるようにした。

論点の二つ目は誤差解析についてである。これまでの Sinc スキームに対する既存研究では、 $N \rightarrow \infty$ でスキームが可解である保証や、近似解が収束する保証が、理論的に与えられていないという難点があった。一定の誤差解析を与えているものもあるが、スキームの可解性は暗黙に仮定されており、さらに誤差の評価式の中に、多くの場合、連立 1 次方程式の係数行列の、逆行列のノルムの項が含まれていた。この項は N に依存する項であるにも拘わらず、 N に対する挙動が未評価であったため、結果として理論収束性も不明のままであった。ただし、先行研究における数値実験では、実際にスキームは可解となり、 $O(\exp(-c_1\sqrt{N}))$ や $O(\exp(-c_2N/\log N))$ という収束性が（有限の N の範囲で）観察されていた。本論文では、実際に $N \rightarrow \infty$ において、スキームが可解であること、そして数値解が収束することを理論的に示し、その収束速度が $O(\exp(-c_1\sqrt{N}))$ や $O(\exp(-c_2N/\log N))$ であることを理論的に裏付けた。以上をまとめると、表 11.1 の太字部分のようになる（表 1.2 再掲）。

さらに本論文では、スキームの数値解の誤差を定量的に評価するための基礎研究を行った。これまでの Sinc 数値計算法に対する誤差解析では、収束次数の解析を目的とし、ある定数 C

表 11.1 第二種積分方程式に対する Sinc スキームにおける本論文の貢献 (太字部分).

方程式	離散化手法	変数変換	スキーム提案・数値的検証	論点 1	論点 2	該当章
(1.1)	Sinc-Nyström 法	SE 変換	Muhammad et al. [82]	解決	解決	第 3 章
		DE 変換	Muhammad et al. [82]	解決	解決	
	Sinc 選点法	SE 変換	Rashidinia-Zarebnia [114]	解決	解決	第 5 章
		DE 変換	本論文	解決	解決	
(1.2)	Sinc-Nyström 法	SE 変換	Rashidinia-Zarebnia [113]	解決	解決	第 4 章
		DE 変換	Muhammad et al. [82]	解決	解決	
	Sinc 選点法	SE 変換	Rashidinia-Zarebnia [112]	解決	解決	第 6 章
		DE 変換	本論文	解決	解決	
(1.5)	Sinc 選点法	SE 変換	Riley [117, 118]	解決	解決	第 7 章
		DE 変換	Mori et al. [78]	解決	解決	
(1.6)	Sinc 選点法	SE 変換	岡山 (修士論文) [89]	解決済	解決	第 8 章
		DE 変換	岡山 (修士論文) [89]	解決済	解決	

を用いた不等式の形で誤差が評価されていたが、その定数 C が具体的に評価されていないため、実際の誤差を見積もる目的には不十分であった。そこで本論文では、まず第 9 章において、基本近似公式に対してこの定数 C を明示的に評価した誤差解析を行った。さらに第 10 章において、その結果を Fredholm 積分方程式 (1.2) に対する Sinc-Nyström 法 (第 4 章に相当) に対して応用し、数値解の事前誤差評価と事後誤差評価を与えた。

今後の研究課題としては以下の二点が挙げられる。第一に、精度保証への応用を目指した、定数を明示的に表した誤差評価は、積分方程式に対する Sinc スキームとしては上述した第 10 章の内容のみにとどまっており、今後その他の Sinc スキームに対しての研究が望まれる。第二に、さらなる展望として、本論文で取り扱った内容は全て有限区間 $[a, b]$ における結果であるが、これらの結果を区間が半無限区間 $[0, \infty)$ や全無限区間 $(-\infty, \infty)$ における積分方程式に対しても拡張することが挙げられる。

謝辞

私が修士の頃を含め五年間、多岐に渡り指導してくださった松尾宇泰准教授と、研究内容や発表に関し多くの示唆をくださった杉原正顯教授に感謝いたします。また、本論文の審査に携わっていただき、多くの有用なご意見をくださった室田一雄教授、電気通信大学の緒方秀教准教授、本学の数理科学研究科の齊藤宣一准教授にお礼申し上げます。谷口隆晴助教には、私が卒論生の頃から、研究から生活環境まで、様々な面でサポートしていただきました。ありがとうございました。

参考文献

- [1] ABDALKHANI, J.: A numerical approach to the solution of Abel integral equations of the second kind with nonsmooth solution, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **29** (1990), 249–255.
- [2] ABEL, N. H.: Solution de quelques problèmes à l’aide d’intégrales définies, *Magazin Naturvidenskaberne*, **1** (1823), 55–68.
- [3] ABEL, N. H.: Auflösung einer mechanischen Aufgabe, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **1** (1826), 154–157.
- [4] ABU-JEIB, I. T., and SHORES, T. S.: On properties of matrix $I^{(-1)}$ of sinc methods, *New Zealand Journal of Mathematics*, **32** (2003), 1–10.
- [5] AGARWAL, R. P., and O’REGAN, D. (eds.): *Integral and Integrodifferential Equations: Theory, Methods and Applications*, Mathematical Analysis and Applications, Vol. 2, Gordon and Breach, Amsterdam, 2000.
- [6] ANSELONE, P. M.: *Collectively Compact Operator Approximation Theory and Applications to Integral Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.
- [7] ATKINSON, K. E.: *A Survey of Numerical Methods for the Solution of Fredholm Integral Equations of the Second Kind*, SIAM, Philadelphia, PA, 1976.
- [8] ATKINSON, K. E.: *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Vol. 4, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [9] ATKINSON, K. E., and SHAMPINE, L. F.: Algorithm 876: solving Fredholm integral equations of the second kind in MATLAB, *ACM Transactions on Mathematical Software*, **34** (2008), Article No. 21.
- [10] BEIGHTON, S., and NOBLE, B.: An error estimate for Stenger’s quadrature formula, *Mathematics of Computation*, **38** (1982), 539–545.
- [11] BIALECKI, B.: Sinc-collocation methods for two-point boundary value problems, *IMA Journal of Numerical Analysis*, **11** (1991), 357–375.
- [12] BRUNNER, H.: A survey of recent advances in the numerical treatment of Volterra integral and integro-differential equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **8** (1982), 213–229.

- [13] BRUNNER, H.: The numerical solution of weakly singular Volterra integral equations by collocation on graded meshes, *Mathematics of Computation*, **45** (1985), 417–437.
- [14] BRUNNER, H.: Collocation methods for one-dimensional Fredholm and Volterra integral equations, *The State of the Art in Numerical Analysis* (eds. Iserles, A., and Powell, M. J. D.), The Institute of Mathematics and its Applications Conference Series. New Series, Vol. 9, Oxford University Press, New York, 1987, 563–600.
- [15] BRUNNER, H.: *Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Differential Equations*, Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Vol. 15, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [16] BRUNNER, H., and NØRSETT, S. P.: Superconvergence of collocation methods for Volterra and Abel integral equations of the second kind, *Numerische Mathematik*, **36** (1981), 347–358.
- [17] BRUNNER, H., and VAN DER HOUWEN, P. J.: *The Numerical Solution of Volterra Equations*, CWI Monographs, Vol. 3, North-Holland, Amsterdam, 1986.
- [18] BURTON, T. A.: *Volterra Integral and Differential Equations*, 2nd edition, Elsevier, Amsterdam, 2005.
- [19] BUTZER, P. L., SPLETTSTÖSSER, W., and STENS, R. L.: The sampling theorem and linear prediction in signal analysis, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*, **90** (1988), 1–70.
- [20] CAMERON, R. F., and MCKEE, S.: Product integration methods for second-kind Abel integral equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **11** (1984), 1–10.
- [21] CAO, Y., HERDMAN, T., and XU, Y.: A hybrid collocation method for Volterra integral equations with weakly singular kernels, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **41** (2003), 364–381.
- [22] CAO, Y., HUANG, M., LIU, L., and XU, Y.: Hybrid collocation methods for Fredholm integral equations with weakly singular kernels, *Applied Numerical Mathematics*, **57** (2007), 549–561.
- [23] CAPUTO, M.: Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent — II, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, **13** (1967), 529–539.
- [24] CARLSON, T. S., DOCKERY, J., and LUND, J.: A sinc-collocation method for initial value problems, *Mathematics of Computation*, **66** (1997), 215–235.
- [25] CARPINTERI, A., and MAINARDI, F. (eds.): *Fractals and Fractional Calculus in Continuum Mechanics*, Springer-Verlag, Wien, 1997.
- [26] CONWAY, J. B.: *A Course in Functional Analysis*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 96, Springer-Verlag, New York, 1990.
- [27] CORDUNEANU, C.: *Integral Equations and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

- [28] CORDUNEANU, C., and SANDBERG, I. W. (eds.): *Volterra Equations and Applications*, Stability and Control: Theory, Methods and Applications, Vol. 10, Gordon and Breach, Amsterdam, 2000.
- [29] CORLISS, G. F., and RALL, L. B.: Adaptive, self-validating numerical quadrature, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **8** (1987), 831–847.
- [30] DAGNINO, C., DEMICHELIS, V., and SANTI, E.: A nodal spline collocation method for weakly singular Volterra integral equations, *Universitatis Babeş-Bolyai. Studia Mathematica*, **48** (2003), 71–81.
- [31] DAS, S.: *Functional Fractional Calculus for Systems Identification and Controls*, Springer, Berlin, 2007.
- [32] DELVES, L. M.: Numerical software for integral equations, *Numerical Software* (ed. Jacobs, D. A.), Academic Press, London, 1978, 303–323.
- [33] DELVES, L. M., and MOHAMMED, J. L.: *Computational Methods for Integral Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [34] DIXON, J.: On the order of the error in discretization methods for weakly singular second kind Volterra integral equations with nonsmooth solutions, *BIT*, **25** (1985), 624–634.
- [35] DIXON, J.: On the order of the error in discretization methods for weakly singular second kind Volterra integral equations with nonsmooth solutions, *BIT*, **25** (1985), 624–634.
- [36] EIERMANN, M. C.: Automatic, guaranteed integration of analytic functions, *BIT*, **29** (1989), 270–282.
- [37] EL-GAMEL, M., and CANNON, J. R.: On the solution of a second order singularly-perturbed boundary value problem by the sinc-Galerkin method, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **56** (2005), 45–58.
- [38] FELLER, W.: On the integral equation of renewal theory, *Annals of Mathematical Statistics*, **12** (1941), 243–267.
- [39] FOX, L., and GOODWIN, E. T.: The numerical solution of non-singular linear integral equations, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A: Mathematical and Physical Sciences*, **245** (1953), 501–534.
- [40] FREDHOLM, I.: Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Acta Mathematica*, **27** (1903), 365–390.
- [41] GALPERIN, E. A., KANSA, E. J., MAKROGLOU, A., and NELSON, S. A.: Variable transformations in the numerical solution of second kind Volterra integral equations with continuous and weakly singular kernels; extensions to Fredholm integral equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **115** (2000), 193–211.
- [42] GOLBERG, M. A., and CHEN, C. S.: *Discrete Projection Methods for Integral Equations*, Computational Mechanics Press, Southampton, 1996.

- [43] GORENFLO, R., and VESSELLA, S.: *Abel Integral Equations: Analysis and Applications*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1461, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [44] GRAHAM, I. G.: Galerkin methods for second kind integral equations with singularities, *Mathematics of Computation*, **39** (1982), 519–533.
- [45] GRAHAM, I. G.: Singularity expansions for the solutions of second kind Fredholm integral equations with weakly singular convolution kernels, *Journal of Integral Equations*, **4** (1982), 1–30.
- [46] GROETSCH, C. W.: *Inverse Problems in the Mathematical Sciences*, Vieweg Mathematics for Scientists and Engineers, Friedrich Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1993.
- [47] HABER, S.: Two formulas for numerical indefinite integration, *Mathematics of Computation*, **60** (1993), 279–296.
- [48] HACKBUSCH, W.: *Integral Equations: Theory and Numerical Treatment*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1995.
- [49] HILFER, R. (ed.): *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [50] DE HOOG, F., and WEISS, R.: On the solution of a Volterra integral equation with a weakly singular kernel, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **4** (1973), 561–573.
- [51] HU, Q.: Superconvergence of numerical solutions to Volterra integral equations with singularities, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **34** (1997), 1698–1707.
- [52] 染谷勲: 波形傳送, 修教社, 東京, 1949.
- [53] JERRI, A.: The Shannon sampling theorem—its various extensions and applications: a tutorial review, *Proceedings of the IEEE*, **65** (1977), 1565–1596.
- [54] KABANIKHIN, S. I., and LORENZI, A.: *Identification Problems of Wave Phenomena*, Inverse and Ill-posed Problems Series, VSP, Utrecht, 1999.
- [55] KAPER, H. G., and KELLOGG, R. B.: Asymptotic behavior of the solution of the integral transport equation in slab geometry, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **32** (1977), 191–200.
- [56] KARLIN, S.: On the renewal equation, *Pacific Journal of Mathematics*, **5** (1955), 229–257.
- [57] KEARFOTT, R. B.: A Sinc approximation for the indefinite integral, *Mathematics of Computation*, **41** (1983), 559–572.
- [58] KILBAS, A. A., SRIVASTAVA, H. M., and TRUJILLO, J. J.: *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, 2006.
- [59] KIRKWOOD, J. G., and RISEMAN, J.: The intrinsic viscosities and diffusion constants of flexible macromolecules in solution, *Journal of Chemical Physics*, **16** (1948), 565–573.
- [60] KOOSIS, P.: *Introduction to H_p spaces*, 2nd edition, Cambridge Tracts in Mathe-

- matics, Vol. 115, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [61] KOTEL'NIKOV, V. A.: On the carrying capacity of the "ether" and wire in telecommunications, Material for the First All-Union Conference on Questions of Communication, *Izdat. Red. Upr. Svyazi RKKa*, Moscow (1933), in Russian.
 - [62] KYTHE, P. K., and PURI, P.: *Computational Methods for Linear Integral Equations*, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002.
 - [63] LINZ, P.: Numerical methods for Volterra integral equations with singular kernels, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **6** (1969), 365–374.
 - [64] LINZ, P.: *Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations*, SIAM Studies in Applied Mathematics, SIAM, Philadelphia, PA, 1985.
 - [65] LOVE, E. R.: The electrostatic field of two equal circular co-axial conducting disks, *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **2** (1949), 428–451.
 - [66] LUBICH, CH.: Runge–Kutta theory for Volterra and Abel integral equations of the second kind, *Mathematics of Computation*, **41** (1983), 87–102.
 - [67] MAGIN, R. L.: *Fractional Calculus in Bioengineering*, Begell House, Connecticut, 2006.
 - [68] MILLER, G. F.: Algorithms for integral equations, *Software for Numerical Mathematics* (ed. Evans, D. J.), Academic Press, London, 1974, 139–147.
 - [69] MILLER, G. F.: Provision of library programs for the numerical solution of integral equations, *Numerical Solution of Integral Equations* (eds. Delves, L. M., and Walsh, J.), Clarendon Press, Oxford, 1974, 247–256.
 - [70] MILLER, R. K., and FELDSTEIN, A.: Smoothness of solutions of Volterra integral equations with weakly singular kernels, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **2** (1971), 242–258.
 - [71] MILLER, R. K., and UNTERREITER, A.: Switching behavior of PN-diodes: Volterra integral equation models, *Journal of Integral Equations and Applications*, **4** (1992), 257–272.
 - [72] MONEGATO, G., and SCUDERI, L.: High order methods for weakly singular integral equations with nonsmooth input functions, *Mathematics of Computation*, **67** (1998), 1493–1515.
 - [73] MORAN, P. A. P.: Numerical integration in the presence of singularities, *Acta Mathematica Scientia*, **1** (1981), 83–85.
 - [74] MORI, M.: Optimality of the double exponential transformation in numerical analysis, *Sugaku Expositions*, **14** (2001), 103–123; Translation of *Sūgaku*, **50** (1998), 248–264.
 - [75] MORI, M.: The double exponential transformation and its developments, Second International Congress of Chinese Mathematicians, New Studies in Advanced Mathematics, Vol. 4, Int. Press, Somerville, MA, 2004, 3–8.

- [76] MORI, M.: Discovery of the double exponential transformation and its developments, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, Kyoto University, **41** (2005), 897–935.
- [77] MORI, M., NURMUHAMMAD, A., and MUHAMMAD, M.: DE-sinc method for second order singularly perturbed boundary value problems, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **26** (2009), 41–63.
- [78] MORI, M., NURMUHAMMAD, A., and MURAI, T.: Numerical solution of Volterra integral equations with weakly singular kernel based on the DE-sinc method, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **25** (2008), 165–183.
- [79] MORI, M., and SUGIHARA, M.: The double-exponential transformation in numerical analysis, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **127** (2001), 287–296.
- [80] MORLET, A. C.: Convergence of the Sinc method for a fourth-order ordinary differential equation with an application, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **32** (1995), 1475–1503.
- [81] MUHAMMAD, M., and MORI, M.: Double exponential formulas for numerical indefinite integration, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **161** (2003), 431–448.
- [82] MUHAMMAD, M., NURMUHAMMAD, A., MORI, M., and SUGIHARA, M.: Numerical solution of integral equations by means of the Sinc collocation method based on the double exponential transformation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **177** (2005), 269–286.
- [83] 中尾充宏, 山本野人: 精度保証付き数値計算—コンピュータによる無限への挑戦, 日本評論社, 東京, 1998.
- [84] NURMUHAMMAD, A., MUHAMMAD, M., and MORI, M.: Numerical solution of initial value problems based on the double exponential transformation, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, Kyoto University, **41** (2005), 937–948.
- [85] NURMUHAMMAD, A., MUHAMMAD, M., and MORI, M.: Sinc-Galerkin method based on the DE transformation for the boundary value problem of fourth-order ODE, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **206** (2007), 17–26.
- [86] NURMUHAMMAD, A., MUHAMMAD, M., MORI, M., and SUGIHARA, M.: Double exponential transformation in the sinc-collocation method for a boundary value problem with fourth-order ordinary differential equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **182** (2005), 32–50.
- [87] NYQUIST, H.: Certain topics in telegraph transmission theory, *AIEE Transactions*, **47** (1928), 617–644.
- [88] 大石進一: 現代非線形科学シリーズ, 精度保証付き数値計算, 第 6 巻, コロナ社, 東京,

2000.

- [89] 岡山友昭: 弱特異核を持つ積分方程式に対する Sinc 数値計算法, 修士論文, 東京大学大学院情報理工学系研究科, 2007.
- [90] OKAYAMA, T., MATSUO, T., and MASAOKI, S.: Approximate formulae for fractional derivatives by means of Sinc methods, *Journal of Concrete and Applicable Mathematics* (in press).
- [91] 岡山友昭, 松尾宇泰, 杉原正顕: 第二種積分方程式に対する Sinc 選点法の改良とその理論解析, 投稿中.
- [92] 岡山友昭, 松尾宇泰, 杉原正顕: DE-Sinc 法に基づく不定型畳み込みの近似公式, 日本応用数学会 2006 年度年会講演予稿集, 2006, 298–299.
- [93] 岡山友昭, 松尾宇泰, 杉原正顕: 第二種 Fredholm 積分方程式に対する Sinc-Nyström 法の理論解析, 日本応用数学会 2008 年度年会講演予稿集, 2008, 397–398.
- [94] 岡山友昭, 松尾宇泰, 杉原正顕: 第二種 Volterra 積分方程式に対する Sinc-Nyström 法の理論解析, 応用数学合同研究集会報告集, 2008, 193–196.
- [95] OKAYAMA, T., MATSUO, T., and SUGIHARA, M.: Error estimates with explicit constants for Sinc approximation, Sinc quadrature and Sinc indefinite integration, Mathematical Engineering Technical Reports 2009-01, The University of Tokyo, January 2009.
- [96] OKAYAMA, T., MATSUO, T., and SUGIHARA, M.: Improvement of a Sinc-collocation method for Fredholm integral equations of the second kind, Mathematical Engineering Technical Reports 2009-36, The University of Tokyo, August 2009.
- [97] 岡山友昭, 松尾宇泰, 杉原正顕: 第二種 Fredholm 積分方程式に対する Sinc-Nyström 法の定数を明示的に表した誤差評価, 応用数学合同研究集会報告集, 2009, 129–132.
- [98] 岡山友昭, 松尾宇泰, 杉原正顕: 第二種積分方程式に対する Sinc 法とその理論解析, 京都大学数理解析研究所講究録, No. 1638, 2009, 38–55.
- [99] OKAYAMA, T., MATSUO, T., and SUGIHARA, M.: Error estimates with explicit constants for the tanh rule and the DE formula for indefinite integrals, *JSIAM Letters* (in press).
- [100] OKAYAMA, T., MATSUO, T., and SUGIHARA, M.: Sinc-collocation methods for weakly singular Fredholm integral equations of the second kind, *Journal of Computational and Applied Mathematics* (in press).
- [101] ORSI, A.: Product integration for Volterra integral equations of the second kind with weakly singular kernels, *Mathematics of Computation*, **65** (1996), 1201–1212.
- [102] PEDAS, A., and VAINIKKO, G.: Numerical solution of weakly singular Volterra integral equations with change of variables, *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences. Physics. Mathematics*, **53** (2004), 99–106.
- [103] PEDAS, A., and VAINIKKO, G.: Smoothing transformation and piecewise polynomial collocation for weakly singular Volterra integral equations, *Computing*, **73**

- (2004), 271–293.
- [104] PEDAS, A., and VAINIKKO, G.: Smoothing transformation and piecewise polynomial projection methods for weakly singular Fredholm integral equations, *Communications on Pure and Applied Analysis*, **5** (2006), 395–413.
 - [105] PETRAS, K.: Self-validating integration and approximation of piecewise analytic functions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **145** (2002), 345–359.
 - [106] PETRAS, K.: Principles of verified numerical integration, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **199** (2007), 317–328.
 - [107] PITKÄRANTA, J.: On the differential properties of solutions to Fredholm equations with weakly singular kernels, *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, **24** (1979), 109–119.
 - [108] PODLUBNY, I.: *Fractional Differential Equations*, Academic Press, San Diego, 1999.
 - [109] POLYANIN, A. D., and MANZHIROV, A. V.: *Handbook of Integral Equations*, 2nd edition, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2008.
 - [110] PRÜSS, J.: *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
 - [111] RAABE, H.: Untersuchungen an der wechselzeitigen Mehrfachübertragung (Multiplexübertragung), *Elektrische Nachrichtentechnik*, **16** (1939), 213–228.
 - [112] RASHIDINIA, J., and ZAREBNIA, M.: Numerical solution of linear integral equations by using sinc-collocation method, *Applied Mathematics and Computation*, **168** (2005), 806–822.
 - [113] RASHIDINIA, J., and ZAREBNIA, M.: Convergence of approximate solution of system of Fredholm integral equations, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **333** (2007), 1216–1227.
 - [114] RASHIDINIA, J., and ZAREBNIA, M.: Solution of a Volterra integral equation by the sinc-collocation method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **206** (2007), 801–813.
 - [115] REN, Y., ZHANG, B., and QIAO, H.: A simple Taylor-series expansion method for a class of second kind integral equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **110** (1999), 15–24.
 - [116] RICHTER, G. R.: On weakly singular Fredholm integral equations with displacement kernels, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **55** (1976), 32–42.
 - [117] RILEY, B. V.: A Sinc-collocation method for weakly singular Volterra integral equation, *Computation and Control* (eds. Bowers, K., and Lund, J.), Progress in Systems and Control Theory, Vol. 1, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1989, 263–275.
 - [118] RILEY, B. V.: The numerical solution of Volterra integral equations with nonsmooth

- solutions based on Sinc approximation, *Applied Numerical Mathematics*, **9** (1992), 249–257.
- [119] RUDIN, W.: *Real and Complex Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill, New York, 1987.
 - [120] SABATIER, J., AGRAWAL, O. P., and MACHADO, J. A. T. (eds.): *Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering*, Springer, Dordrecht, 2007.
 - [121] SCHMEISER, C., UNTERREITER, A., and WEISS, R.: The switching behavior of a one-dimensional PN-diode in low injection, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **3** (1993), 125–144.
 - [122] SCHNEIDER, C.: Regularity of the solution to a class of weakly singular Fredholm integral equations of the second kind, *Integral Equations Operator Theory*, **2** (1979), 62–68.
 - [123] SCHNEIDER, C.: Product integration for weakly singular integral equations, *Mathematics of Computation*, **36** (1981), 207–213.
 - [124] SCHWARTZ, C.: Numerical integration of analytic functions, *Journal of Computational Physics*, **4** (1969), 19–29.
 - [125] SHANNON, C. E.: A mathematical theory of communication, *The Bell System Technical Journal*, **27** (1948), 379–423.
 - [126] SHANNON, C. E.: Communication in the presence of noise, *Proceedings of the Institute of Radio Engineers*, **37** (1949), 10–21.
 - [127] SMITH, R. C., BOGAR, G. A., BOWERS, K. L., and LUND, J.: The Sinc-Galerkin method for fourth-order differential equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **28** (1991), 760–788.
 - [128] SQUIRE, W.: Numerical evaluation of integrals using Moran transformations, Aerospace Engineering Report No. Tr-14 (1969).
 - [129] STENGER, F.: Integration formulae based on the trapezoidal formula, *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, **12** (1973), 103–114.
 - [130] STENGER, F.: Approximations via Whittaker’s cardinal function, *Journal of Approximation Theory*, **17** (1976), 222–240.
 - [131] STENGER, F.: Remarks on “Integration formulae based on the trapezoidal formula” (*J. Inst. Math. Appl.* **12** (1973), 103–114), *Journal of the Institute of Mathematics and its Applications*, **19** (1977), 145–147.
 - [132] STENGER, F.: Optimal convergence of minimum norm approximations in H_p , *Numerische Mathematik*, **29** (1978), 345–362.
 - [133] STENGER, F.: A “Sinc-Galerkin” method of solution of boundary value problems, *Mathematics of Computation*, **33** (1979), 85–109.
 - [134] STENGER, F.: Numerical methods based on Whittaker cardinal, or sinc functions, *SIAM Review*, **23** (1981), 165–224.

- [135] STENGER, F.: *Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions*, Springer-Verlag, New York, 1993.
- [136] STENGER, F.: Collocating convolutions, *Mathematics of Computation*, **64** (1995), 211–235.
- [137] STENGER, F.: Summary of Sinc numerical methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **121** (2000), 379–420.
- [138] SUGIHARA, M.: Optimality of the double exponential formula—functional analysis approach, *Numerische Mathematik*, **75** (1997), 379–395.
- [139] SUGIHARA, M.: Double exponential transformation in the sinc-collocation method for two-point boundary value problems, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **149** (2002), 239–250.
- [140] SUGIHARA, M.: Near optimality of the sinc approximation, *Mathematics of Computation*, **72** (2003), 767–786.
- [141] SUGIHARA, M., and MATSUO, T.: Recent developments of the Sinc numerical methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **164–165** (2004), 673–689.
- [142] TAKAHASI, H., and MORI, M.: Double exponential formulas for numerical integration, *Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences*, Kyoto University, **9** (1974), 721–741.
- [143] TAKAYASU, A., OISHI, S., and KUBO, T.: Guaranteed error estimate for solutions to linear two-point boundary value problems with FEM, *Proceedings of Asia Simulation Conference 2009*, 2009, Paper ID: 163 (8 pages).
- [144] TAKAYASU, A., OISHI, S., and KUBO, T.: Guaranteed error estimate for solutions to two-point boundary value problem, *Proceedings of 2009 International Symposium on Nonlinear Theory and its Applications*, 2009, 214–217.
- [145] TAKAYASU, A., OISHI, S., and KUBO, T.: Numerical verification for solutions to nonlinear two-point boundary value problems with finite element method, *Proceedings of the 24th International Technical Conference on Circuits/Systems, Computers and Communications*, 2009, 165–168.
- [146] 田中健一郎: 解析関数に対する関数近似と数値積分の研究, 博士論文, 東京大学大学院情報理工学系研究科, 2007.
- [147] TANAKA, K., SUGIHARA, M., and MUROTA, K.: Numerical indefinite integration by double exponential sinc method, *Mathematics of Computation*, **74** (2005), 655–679.
- [148] TANAKA, K., SUGIHARA, M., and MUROTA, K.: Function classes for successful DE-Sinc approximations, *Mathematics of Computation*, **78** (2009), 1553–1571.
- [149] TANAKA, K., SUGIHARA, M., MUROTA, K., and MORI, M.: Function classes for double exponential integration formulas, *Numerische Mathematik*, **111** (2009), 631–655.

- [150] UNTERREITER, A.: Volterra integral equation models for semiconductor devices, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **19** (1996), 425–450.
- [151] VAINIKKO, E., and VAINIKKO, G.: A spline product quasi-interpolation method for weakly singular Fredholm integral equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **46** (2008), 1799–1820.
- [152] VAINIKKO, G., and PEDAS, A.: The properties of solutions of weakly singular integral equations, *Australian Mathematical Society. Journal. Series B: Applied Mathematics*, **22** (1981), 419–430.
- [153] VAINIKKO, G., and UBA, P.: A piecewise polynomial approximation to the solution of an integral equation with weakly singular kernel, *Australian Mathematical Society. Journal. Series B. Applied Mathematics*, **22** (1981), 431–438.
- [154] VOLTERRA, V.: Sulla inversione degli integrali definiti, *Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino*, **31** (1896), 311–323 (Nota I); 400–408 (Nota II).
- [155] WHITTAKER, E. T.: On the functions which are represented by the expansions of the interpolation theory, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **35** (1915), 181–194.
- [156] YAMAMOTO, T.: Approximation of the Hilbert transform via use of sinc convolution, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, **23** (2006), 320–328.
- [157] YAMANAKA, N., OKAYAMA, T., OISHI, S., and OGITA, T.: A fast automatic integration algorithm using double exponential formula based on verification theory, *Proceedings of the 24th International Technical Conference on Circuits/Systems, Computers and Communications*, 2009, 161–164.
- [158] YAMANAKA, N., OKAYAMA, T., OISHI, S., and OGITA, T.: A fast verified automatic integration algorithm using double exponential formula, 京都大学数理解析研究所講究録, No. 1638, 2009, 146–158.
- [159] ZAYED, A. I.: *Advances in Shannon's Sampling Theory*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1993.

付録 A

不定積分近似に対する新たなアプローチ

本章は，不定積分を近似するための新たな方法とその応用についてまとめる．

A.1 動機：Abel 核を持つ積分の近似

これまで，第 3 章や第 5 章では，方程式に現れる不定積分 $\mathcal{V}f$ を近似する方法としては，SE-Sinc 不定積分 (2.41) と DE-Sinc 不定積分 (2.46) を用いていた．ところが，第 7 章で現れたような，Abel 核 $(t-s)^{p-1}$ が含まれている

$$\int_a^t (t-s)^{p-1} g(s) ds, \quad a \leq t \leq b \quad (\text{A.1})$$

という形の積分は，SE-Sinc 不定積分や DE-Sinc 不定積分を適用することはできない．この理由は，SE-Sinc 不定積分や DE-Sinc 不定積分では，被積分関数が区間 $[a, b]$ の内部で特異性を持たないことを前提としているが，Abel 核は区間の内部 $s = t$ で発散するからである．

この積分に対する近似法としては，大きくわけて二通り考えられている．一つ目は，式 (A.1) は不定積分ではあるが，あえて $[a, t]$ を定区間（特異点 $s = t$ を端点）とみなして，SE-Sinc 積分や DE-Sinc 積分を適用する方法であり，これが実際に第 7 章で用いられている [78, 117]．もう一つは，式 (A.1) を

$$\int_a^t f(t-s) g(s) ds, \quad a \leq t \leq b \quad (\text{A.2})$$

という不定型畳み込みとみなして，不定型畳み込みに対する Sinc 数値計算法 [92, 136] を用いる方法である．本章ではこれらの近似法についての結果をまとめる．第 A.2 節は前者の近似法について，第 A.3 節は後者の近似法についての章である．

A.2 SE-Sinc 積分・DE-Sinc 積分による数値不定積分

ここでは、不定積分を、定積分公式である SE-Sinc 積分・DE-Sinc 積分を用いて近似する方法についてまとめる。

A.2.1 主結果 1：一般の被積分関数に対する誤差評価

議論の単純化のため、被積分関数をまとめて f とおき、式 (2.40) の不定積分 $\mathcal{J}f$ を考える。これを SE-Sinc 積分で近似するには、区間 (a, t) を $(-\infty, \infty)$ に写す変数変換 $\sigma = \psi_{a,t}^{\text{SE}}(\sigma)$ を行った後に Sinc 積分 (2.30) を適用して

$$\int_a^t f(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(\sigma)) \{\psi_{a,t}^{\text{SE}}\}'(\sigma) d\sigma \approx h \sum_{j=-N}^N f(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{a,t}^{\text{SE}}\}'(jh) \quad (\text{A.3})$$

のようにする。DE-Sinc 積分の場合も同様にして、

$$\int_a^t f(s) ds = \int_{-\infty}^{\infty} f(\psi_{a,t}^{\text{DE}}(\sigma)) \{\psi_{a,t}^{\text{DE}}\}'(\sigma) d\sigma \approx h \sum_{j=-N}^N f(\psi_{a,t}^{\text{DE}}(jh)) \{\psi_{a,t}^{\text{DE}}\}'(jh) \quad (\text{A.4})$$

のようにする。これらの近似に対し、次のような誤差評価が得られる。

定理 A.1 (Okayama et al. [99, Theorem 10]) d は $0 < d < \pi$ をみたす定数とし、関数 f は $\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ 上正則であって、かつ任意の $z \in \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つとする。このとき刻み幅 h を式 (4.2) で定めると、次の評価が成り立つ：

$$\begin{aligned} & \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^t f(s) ds - h \sum_{j=-N}^N f(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{a,t}^{\text{SE}}\}'(jh) \right| \\ & \leq 2L(b-a) \left[1 + \frac{2}{(1 - e^{-\sqrt{2\pi d}}) \cos^2(d/2)} \right] e^{-\sqrt{2\pi d}N}. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

定理 A.2 (Okayama et al. [99, Theorem 11]) d は $0 < d < \pi/2$ をみたす定数とし、関数 f は $\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ 上正則であって、かつ任意の $z \in \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つとする。さらに f は点 b で正則であるとし、かつ $|f(b)| \leq K$ とする。このとき、 $N \geq e/(4d)$ をみたす N に対し、刻み幅 h を式 (4.8) で定めると、次の評価が成り立つ：

$$\begin{aligned} & \max_{a \leq t \leq b} \left| \int_a^t f(s) ds - h \sum_{j=-N}^N f(\psi_{a,t}^{\text{DE}}(jh)) \{\psi_{a,t}^{\text{DE}}\}'(jh) \right| \\ & \leq 2L(b-a) \left[e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{(1 - e^{-\frac{\pi}{2}e}) \cos^2(\frac{\pi}{2} \sin d) \cos d} \right] e^{-2\pi dN / \log(4dN)}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

この結果は、 $\mathcal{J}f$ に対する近似だけでなく、一般に

$$\int_{p(t)}^{q(t)} f(s) ds, \quad t \in [A, B] \quad (\text{A.7})$$

の形の積分に対しても拡張できる．ただし $a \leq p(t) \leq q(t) \leq b$ とする．SE-Sinc 積分で近似する場合は，

$$\begin{aligned} \int_{p(t)}^{q(t)} f(s) ds &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\psi_{p(t),q(t)}^{\text{SE}}(\sigma)) \{\psi_{p(t),q(t)}^{\text{SE}}\}'(\sigma) d\sigma \\ &\approx h \sum_{j=-N}^N f(\psi_{p(t),q(t)}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{p(t),q(t)}^{\text{SE}}\}'(jh) \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

とすればよく，DE-Sinc 積分の場合も同様に，

$$\begin{aligned} \int_{p(t)}^{q(t)} f(s) ds &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\psi_{p(t),q(t)}^{\text{DE}}(\sigma)) \{\psi_{p(t),q(t)}^{\text{DE}}\}'(\sigma) d\sigma \\ &\approx h \sum_{j=-N}^N f(\psi_{p(t),q(t)}^{\text{DE}}(jh)) \{\psi_{p(t),q(t)}^{\text{DE}}\}'(jh) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

のようにすればよい．これらの近似に対する誤差評価は次のようになる．

定理 A.3 (Okayama et al. [99, Theorem 14]) d は $0 < d < \pi$ をみたす定数とし，関数 f は $\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ 上正則であって，かつ任意の $z \in \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つとする．このとき刻み幅 h を式 (4.2) で定めると，次の評価が成り立つ：

$$\begin{aligned} &\max_{A \leq t \leq B} \left| \int_{p(t)}^{q(t)} f(s) ds - h \sum_{j=-N}^N f(\psi_{p(t),q(t)}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{p(t),q(t)}^{\text{SE}}\}'(jh) \right| \\ &\leq 2L(b-a) \left[1 + \frac{2}{(1 - e^{-\sqrt{2\pi d}}) \cos^2(d/2)} \right] e^{-\sqrt{2\pi d}N}. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

定理 A.4 (Okayama et al. [99, Theorem 17]) d は $0 < d < \pi/2$ をみたす定数とし，関数 f は $\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ 上正則であって，かつ任意の $z \in \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つとする．さらに f は点 a と b で正則であるとし，かつ $|f(a)| \leq K$, $|f(b)| \leq K$ が成り立つとする．このとき， $N \geq e/(4d)$ をみたす N に対し，刻み幅 h を式 (4.8) で定めると，次の評価が成り立つ：

$$\begin{aligned} &\max_{A \leq t \leq B} \left| \int_{p(t)}^{q(t)} f(s) ds - h \sum_{j=-N}^N f(\psi_{p(t),q(t)}^{\text{DE}}(jh)) \{\psi_{p(t),q(t)}^{\text{DE}}\}'(jh) \right| \\ &\leq 2L(b-a) \left[e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{(1 - e^{-\frac{\pi}{2}e}) \cos^2(\frac{\pi}{2} \sin d) \cos d} \right] e^{-2\pi dN / \log(4dN)}. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

A.2.2 主結果 2：非整数階積分・非整数階微分に対する誤差評価

ここでは，前節のような近似法の特別な場合として，非整数階積分・非整数階微分に対して応用した場合の誤差評価を与える．非整数階積分・非整数階微分は，物理 [49]，工学 [120]，化学 [108]，生物 [67]，制御 [31] や，他にも様々な分野で表れる重要な量である [25, 58]．

非整数階積分・非整数階微分の定義

q を正の定数として、関数 f の q 階積分 $\mathbf{I}_a^q f$ は

$$\mathbf{I}_a^q[f](t) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_a^t (t-s)^{q-1} f(s) ds, \quad t \geq a \quad (\text{A.12})$$

で定義される。これは Riemann-Liouville の非整数階積分と呼ばれる。また、 p を非負の実数として、Riemann-Liouville の p 階微分は

$$\mathbf{D}_a^p[f](t) = \left(\frac{d}{dt} \right)^{\lfloor p \rfloor + 1} \left[\mathbf{I}_a^{\lfloor p \rfloor - p + 1} f \right](t), \quad t \geq a \quad (\text{A.13})$$

で定義される。また、近年では Caputo [23] の p 階微分の定義

$$\mathbf{D}_a^p[f](t) = \mathbf{I}_a^{\lfloor p \rfloor - p + 1} \left[\left(\frac{d}{dt} \right)^{\lfloor p \rfloor + 1} f \right](t), \quad t \geq a \quad (\text{A.14})$$

が有用であると注目されており、本論文では非整数階微分としてはこちらの定義を取り扱う。Caputo の p 階微分が計算できれば、Riemann-Liouville の p 階微分は

$$\mathbf{D}_a^p[f](t) = \mathbf{D}_a^p[f](t) + \sum_{k=0}^{\lfloor p \rfloor} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^{k-p} \quad (\text{A.15})$$

の関係式を用いて計算することができる。

近似公式の導出

$0 < p < 1$ と $0 < q < 1$ の場合が本質的なので、以下では $p, q \in (0, 1)$ の場合を考える。ここでは被積分関数を g とおく。 q 階積分を SE-Sinc 積分で近似するには、

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_a^q[g](t) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(\sigma)) \{\psi_{a,t}^{\text{SE}}\}'(\sigma)}{(t - \psi_{a,t}^{\text{SE}}(\sigma))^{1-q}} d\sigma \\ &= \frac{(t-a)^q}{\Gamma(q)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(\sigma)) d\sigma}{(1 + e^{-\sigma})(1 + e^{\sigma})^q} \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

のように SE 変換を用いて変形したのち、

$$\mathbf{I}_a^q[g](t) \approx \mathbf{I}_N^{\text{SE}}[g](t) = \frac{(t-a)^q}{\Gamma(q)} h \sum_{k=-N}^N \frac{g(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(kh))}{(1 + e^{-kh})(1 + e^{kh})^q} \quad (\text{A.17})$$

と近似すればよい。同様に DE-Sinc 積分で近似するには、

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_a^q[g](t) &= \frac{1}{\Gamma(q)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\psi_{a,t}^{\text{DE}}(\sigma)) \{\psi_{a,t}^{\text{DE}}\}'(\sigma)}{(t - \psi_{a,t}^{\text{DE}}(\sigma))^{1-q}} d\sigma \\ &= \frac{(t-a)^q}{\Gamma(q)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\psi_{a,t}^{\text{DE}}(\sigma)) \pi \cosh(\sigma) d\sigma}{(1 + e^{-\pi \sinh(\sigma)})(1 + e^{\pi \sinh(\sigma)})^q} \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

のように DE 変換を用いて変形したのち,

$$\mathbf{I}_a^q[g](t) \approx \mathbf{I}_N^{\text{DE}}[g](t) = \frac{(t-a)^q}{\Gamma(q)} h \sum_{k=-N}^N \frac{g(\psi_{a,t}^{\text{DE}}(kh)) \pi \cosh(kh)}{(1 + e^{-\pi \sinh(kh)})(1 + e^{\pi \sinh(kh)})^q} \quad (\text{A.19})$$

と近似すればよい.

次に p 階微分の近似を考える. 定義より, $0 < p < 1$ では

$$\mathbf{D}_a^p[f](t) = \mathbf{I}_a^{1-p}[f'](t), \quad t \geq a \quad (\text{A.20})$$

と表される. $\mathbf{I}_a^{1-p} f'$ の近似は, $g = f'$, $q = 1 - p$ とおいて上記のようにすればよいので, あと f' の近似を考えればよい. まず, SE 変換と Sinc 関数近似を使う場合は, 式 (2.17) で $F(x) = f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x))/Q(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x))$ とおいた

$$\frac{f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x))}{Q(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(x))} \approx \sum_{j=-N}^N \frac{f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))}{Q(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))} S(j, h)(x) \quad (\text{A.21})$$

という近似を考える. これは関数 f に対する近似式に直せば

$$f(t) \approx \mathbf{C}_N^{\text{SE}}[f](t) = \sum_{j=-N}^N \frac{f(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))}{Q(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(jh))} Q(t) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \quad (\text{A.22})$$

と表せる. この両辺を微分することで, f' に対する近似式

$$f'(t) \approx \frac{d}{dt} \mathbf{C}_N^{\text{SE}}[f](t) \quad (\text{A.23})$$

が得られる. 以上をまとめれば, $\mathbf{D}_a^p f$ に対する近似式

$$\mathbf{D}_a^p[f](t) = \mathbf{I}_a^{1-p}[f'](t) \approx \mathbf{I}_N^{\text{SE}}[f'](t) \approx \mathbf{I}_N^{\text{SE}}[\{\mathbf{C}_N^{\text{SE}} f\}'](t) \quad (\text{A.24})$$

が得られる. また, DE 変換と Sinc 関数近似を使う場合も同様に,

$$f(t) \approx \mathbf{C}_N^{\text{DE}}[f](t) = \sum_{j=-N}^N \frac{f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))}{Q(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))} Q(t) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \quad (\text{A.25})$$

という近似式の両辺を微分することで,

$$f'(t) \approx \frac{d}{dt} \mathbf{C}_N^{\text{DE}}[f](t) \quad (\text{A.26})$$

という近似式が得られるので, $\mathbf{D}_a^p f$ に対しては

$$\mathbf{D}_a^p[f](t) = \mathbf{I}_a^{1-p}[f'](t) \approx \mathbf{I}_N^{\text{DE}}[f'](t) \approx \mathbf{I}_N^{\text{DE}}[\{\mathbf{C}_N^{\text{DE}} f\}'](t) \quad (\text{A.27})$$

のように近似すればよい.

近似公式に対する誤差評価

上述した、非整数階積分・非整数階微分の近似に対する誤差評価は次のようになる。

定理 A.5 (Okayama et al. [90, Lemma 3]) d は $0 < d < \pi$ をみたすとし、関数 g は $\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ 上正則かつ有界とする。このとき、刻み幅 h を $h = \sqrt{2\pi d/(qN)}$ で定めると、 N に依存しない定数 C が存在して

$$\|\mathbf{I}_a^q g - \mathbf{I}_N^{\text{SE}} g\|_{\mathbf{X}} \leq C e^{-\sqrt{2\pi d q N}} \quad (\text{A.28})$$

が成り立つ。

定理 A.6 (Okayama et al. [90, Lemma 10]) d は $0 < d < \pi/2$ をみたすとし、関数 g は $\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ 上正則かつ有界とする。このとき、 $N > \mu/(4d)$ をみたす N に対し、刻み幅 h を $h = \log(4dN/q)/N$ で定めると、 N に依存しない定数 C が存在して

$$\|\mathbf{I}_a^q g - \mathbf{I}_N^{\text{DE}} g\|_{\mathbf{X}} \leq C e^{-2\pi d N / \log(4dN/q)} \quad (\text{A.29})$$

が成り立つ。

定理 A.7 (Okayama et al. [90, Theorem 1]) $(f/Q) \in \mathbf{L}_\alpha(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ とし、 $\mu = \min\{1-p, \alpha\}$ とおく。このとき、刻み幅 h を式 (2.53) で定めると、 N に依存しない定数 C が存在して

$$\|\mathbf{D}_a^p f - \mathbf{I}_N^{\text{SE}} \{\mathbf{C}_N^{\text{SE}} f\}'\|_{\mathbf{X}} \leq C N e^{-\sqrt{\pi d \mu N}} \quad (\text{A.30})$$

が成り立つ。

定理 A.8 (Okayama et al. [90, Theorem 2]) $(f/Q) \in \mathbf{L}_\alpha(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ かつ f は点 b で正則とし、 $\mu = \min\{1-p, \alpha\}$ とおく。このとき、 $N > \mu/(2d)$ をみたす自然数 N に対して刻み幅 h を式 (2.58) で定めると、 N に依存しない定数 C が存在して

$$\|\mathbf{D}_a^p f - \mathbf{I}_N^{\text{DE}} \{\mathbf{C}_N^{\text{DE}} f\}'\|_{\mathbf{X}} \leq C \frac{N}{\log(2dN/\mu)} e^{-\pi d N / \log(2dN/\mu)} \quad (\text{A.31})$$

が成り立つ。

A.2.3 証明：一般の被積分関数に対する誤差評価

ここでは §A.2.1 で述べた誤差評価の証明を行う。まず、定理 2.19 と定理 2.23 を素直に近似式 (A.17) と (A.19) に適用すると、次のような誤差評価が得られる。

定理 A.9 (Okayama et al. [99, Theorem 6]) d は $0 < d < \pi$ をみたす定数とする。また、任意の $t \in [a, b]$ に対して一様に、 f は $\psi_{a,t}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ で正則であって、かつ任意の $z \in \psi_{a,t}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つとする。このとき刻み幅 h を式 (4.2) で定めると、次の評価が成

り立つ：

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^t f(s) ds - h \sum_{j=-N}^N f(\psi_{a,t}^{\text{SE}}(jh)) \{\psi_{a,t}^{\text{SE}}\}'(jh) \right| \\ & \leq 2L(t-a) \left[1 + \frac{2}{(1 - e^{-\sqrt{2\pi d}}) \cos^2(d/2)} \right] e^{-\sqrt{2\pi d}N}. \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

定理 A.10 (Okayama et al. [99, Theorem 7]) d は $0 < d < \pi/2$ をみたす定数とする．また，任意の $t \in [a, b]$ に対して一様に， f は $\psi_{a,t}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ で正則であって，かつ任意の $z \in \psi_{a,t}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つとする．このとき， $N \geq e/(4d)$ をみたす N に対し，刻み幅 h を式 (4.8) で定めると，次の評価が成り立つ：

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^t f(s) ds - h \sum_{j=-N}^N f(\psi_{a,t}^{\text{DE}}(jh)) \{\psi_{a,t}^{\text{DE}}\}'(jh) \right| \\ & \leq 2L(t-a) \left[e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{(1 - e^{-\frac{\pi}{2}} e) \cos^2(\frac{\pi}{2} \sin d) \cos d} \right] e^{-2\pi dN / \log(4dN)}. \end{aligned} \quad (\text{A.33})$$

これらの定理では， f に対する仮定が t に依存している（領域が $\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ や $\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ ではなく $\psi_{a,t}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ や $\psi_{a,t}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ であることに注意）が，この仮定を任意の $t \in [a, b]$ に対して確かめることは難しい．ただし，補題 7.14 や補題 7.15 を用いると，実際には次のような補題が成り立つことがわかる．

補題 A.11 (Okayama et al. [99, Lemma 8]) d は $0 < d < \pi$ をみたす定数とし， f は $\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ 上正則であって，かつ任意の $z \in \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つとする．このとき，任意の $t \in [a, b]$ に対し一様に， f は $\psi_{a,t}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ 上正則であって，かつ任意の $z \in \psi_{a,t}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つ．

補題 A.12 (Okayama et al. [99, Lemma 9]) d は $0 < d < \pi/2$ をみたす定数とし， f は $\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d) \cup \{b\}$ 上正則であって，かつ任意の $z \in \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d) \cup \{b\}$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つとする．このとき，任意の $t \in [a, b]$ に対し一様に， f は $\psi_{a,t}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ 上正則であって，かつ任意の $z \in \psi_{a,t}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つ．

これらの補題は， $t = b$ のときのみ仮定を確かめれば十分であることを示している．これらの補題と，単純な評価 $2L(t-a) \leq 2L(b-a)$ を用いると，定理 A.9 と定理 A.10 はそれぞれ定理 A.1 と定理 A.2 のように書き換えられることがわかる．

次に，定理 A.3 と定理 A.4 を証明する．これらの定理を示すには，定理 A.1 と定理 A.2 の場合と同様に，次の補題を示すことが本質的である．

補題 A.13 (Okayama et al. [99, Lemma 12]) d は $0 < d < \pi$ をみたす定数とし， f は $\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ 上正則であって，かつ任意の $z \in \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つとする．このとき，任意の $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$ をみたす t_1, t_2 に対し一様に， f は $\psi_{t_1,t_2}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ 上正則であって，かつ任意の $z \in \psi_{t_1,t_2}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つ．

補題 A.14 (Okayama et al. [99, Lemma 15]) d は $0 < d < \pi/2$ をみたす定数とし, f は $\{a\} \cup \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d) \cup \{b\}$ 上正則であって, かつ任意の $z \in \{a\} \cup \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d) \cup \{b\}$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つとする. このとき, 任意の $a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$ をみたす t_1, t_2 に対し一様に, f は $\psi_{t_1,t_2}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ 上正則であって, かつ任意の $z \in \psi_{t_1,t_2}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つ.

これらの補題は, 補題 A.11・補題 A.12 と同様に次の補題が成り立つことより, 直ちに示される.

補題 A.15 (Okayama et al. [99, Lemma 13]) d は $0 < d < \pi$ をみたす定数とし, f は $\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ 上正則であって, かつ任意の $z \in \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つとする. このとき, 任意の $t \in [a, b]$ に対し一様に, f は $\psi_{t,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ 上正則であって, かつ任意の $z \in \psi_{t,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つ.

補題 A.16 (Okayama et al. [99, Lemma 16]) d は $0 < d < \pi/2$ をみたす定数とし, f は $\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d) \cup \{a\}$ 上正則であって, かつ任意の $z \in \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d) \cup \{a\}$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つとする. このとき, 任意の $t \in [a, b]$ に対し一様に, f は $\psi_{t,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ 上正則であって, かつ任意の $z \in \psi_{t,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ に対し $|f(z)| \leq L$ が成り立つ.

以上で証明は完了となる.

A.2.4 証明：非整数階積分・非整数階微分に対する誤差評価

ここでは §A.2.2 で述べた誤差評価の証明を行う.

SE 変換と Sinc 関数近似を用いた場合 (定理 A.5・定理 A.7)

定理 A.5 の証明の手順は定理 A.1 と全く同様であるので, 省略する. 定理 A.7 の証明のためには, 次の二つの定理が重要である.

定理 A.17 (Okayama et al. [90, Theorem 3]) 定理 A.7 の仮定が成り立つとすると, N に依存しない定数 C が存在して

$$\|\mathbf{I}_a^{1-p} f' - \mathbf{I}_N^{\text{SE}} f'\|_{\mathbf{X}} \leq C e^{-\sqrt{\pi d \mu N}} \quad (\text{A.34})$$

が成り立つ.

定理 A.18 (Stenger [135, Corollary of Theorem 4.4.2]) 定理 A.7 の仮定が成り立つとすると, N に依存しない定数 C が存在して

$$\|\{f - \mathbf{C}_N^{\text{SE}} f\}'\|_{\mathbf{X}} \leq C N e^{-\sqrt{\pi d \mu N}} \quad (\text{A.35})$$

が成り立つ.

定理 A.17 の証明は, 定理 A.5 の証明において, 定理 2.19 ではなく系 2.19.a を用いるようにすればよい. 以上の結果と, $\sup_N \|\mathbf{I}_N^{\text{SE}}\|_{\mathbf{X}} < \infty$ より, 定理 A.7 が得られる.

DE 変換と Sinc 関数近似を用いた場合 (定理 A.6・定理 A.8)

定理 A.6 の証明の手順は定理 A.2 と全く同様であるので、省略する。定理 A.8 の証明のためには、 $\sup_N \|\mathbf{I}_N^{\text{DE}}\|_{\mathbf{X}} < \infty$ がやはり成り立つので、次の二つの定理を示せばよい。

定理 A.19 (Okayama et al. [90, Theorem 6]) 定理 A.8 の仮定が成り立つとすると、 N に依存しない定数 C が存在して

$$\|\mathbf{I}_a^{1-p} f' - \mathbf{I}_N^{\text{DE}} f'\|_{\mathbf{X}} \leq C e^{-\pi d N / \log(2dN/\mu)} \quad (\text{A.36})$$

が成り立つ。

定理 A.20 (Okayama et al. [90, Theorem 7]) 定理 A.8 の仮定が成り立つとすると、 N に依存しない定数 C が存在して

$$\|\{f - \mathbf{C}_N^{\text{DE}} f\}'\|_{\mathbf{X}} \leq C \frac{N}{\log(2dN/\mu)} e^{-\pi d N / \log(2dN/\mu)} \quad (\text{A.37})$$

が成り立つ。

定理 A.19 の証明は、定理 A.6 の証明において、定理 2.23 ではなく系 2.23.a を用いるようにすればよい。

以下では残る定理 A.20 を示す。まず、

$$\begin{aligned} \left| \frac{d}{dt} \{f(t) - \mathbf{C}_N^{\text{DE}}[f](t)\} \right| &\leq \left| \frac{d}{dt} \left\{ f(t) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))}{Q(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))} Q(t) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \right\} \right| \\ &\quad + \sum_{j>|N|} \left| \frac{f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))}{Q(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))} \right| \left| \frac{d}{dt} \{Q(t) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t))\} \right| \quad (\text{A.38}) \end{aligned}$$

と評価できる。先に右辺の第一項を評価する。次の定理が、 $\psi(\mathbb{R}) = (a, b)$ となるような任意の等角写像 ψ に対して成り立つ。

定理 A.21 (Stenger [135, part of Theorem 4.4.2]) 次の二つの条件を仮定する：

(A1) $f(\psi(\cdot))/Q(\psi(\cdot)) \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$.

(A2) ψ と Q のみに依存する定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\sup_{\substack{t \in (a, b) \\ -\pi/h \leq s \leq \pi/h}} \left| \frac{d}{dt} \left\{ Q(t) e^{i s \psi^{-1}(t)} \right\} \right| \leq \frac{C}{h}. \quad (\text{A.39})$$

このとき、 ψ, Q, d, f のみに依存する定数 $\tilde{C}$ が存在して、

$$\sup_{t \in (a, b)} \left| \frac{d}{dt} \left\{ f(t) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{f(\psi(jh))}{Q(\psi(jh))} Q(t) S(j, h) (\psi^{-1}(t)) \right\} \right| \leq \tilde{C} \frac{e^{-\pi d/h}}{h} \quad (\text{A.40})$$

が成り立つ。

定理 A.20 における仮定 $(f/Q) \in \mathbf{L}_\alpha(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ の下で, この条件 (A1) と (A2) が $\psi(t) = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(t)$ として成り立つことを示す. 仮定 $(f/Q) \in \mathbf{L}_\alpha(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ より

$$\left| \frac{f(z)}{Q(z)} \right| \leq C |Q_{\alpha,\alpha}(z)| \quad (\text{A.41})$$

が成り立つ (定義 2.14 を参照) ので, 条件 (A1) のためには, $\mathcal{N}_1(Q_{\alpha,\alpha}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\cdot)), d)$ が有界であることを示せばよいが, これは補題 9.16 で既に示されている. また条件 (A2) も, Leibniz 則と次の不等式

$$\frac{Q(t)}{\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t))} = \frac{(t-a)(b-t)}{\frac{\pi(t-a)(b-t)}{b-a} \sqrt{1 + \left\{ \frac{1}{\pi} \log \left(\frac{t-a}{b-t} \right) \right\}^2}} \leq \frac{b-a}{\pi} \quad (\text{A.42})$$

を用いることで簡単に示すことができる.

補題 A.22 (Okayama et al. [90, Lemma 5]) 定理 A.21 の条件 (A2) は, $\psi(t) = \psi_{a,b}^{\text{DE}}(t)$ として成り立つ.

よって, 不等式 (A.38) の第一項は次のように評価できる.

補題 A.23 (Okayama et al. [90, Lemma 6]) $(f/Q) \in \mathbf{L}_\alpha(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とする. このとき, h に依存しない定数 C が存在して,

$$\sup_{t \in (a,b)} \left| \frac{d}{dt} \left\{ f(t) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))}{Q(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))} Q(t) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \right\} \right| \leq \tilde{C} \frac{e^{-\pi d/h}}{h} \quad (\text{A.43})$$

が成り立つ.

よって, 残るは不等式 (A.38) の第二項の評価である. これは次のように評価できる.

補題 A.24 (Okayama et al. [90, Lemma 7]) $(f/Q) \in \mathbf{L}_\alpha(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とする. このとき, h と N に依存しない定数 C が存在して,

$$\sum_{j > |N|} \left| \frac{f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))}{Q(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))} \right| \left| \frac{d}{dt} \{ Q(t) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \} \right| \leq C \frac{1}{h^2 e^{Nh}} e^{-\frac{\pi}{2} \alpha \exp(Nh)} \quad (\text{A.44})$$

が成り立つ.

証明. まず, 次の等式

$$Q(t) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) = \frac{hQ(t)}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{is[\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)-jh]} ds \quad (\text{A.45})$$

と補題 A.22 より, 定数 C_1 によって

$$\sup_{t \in (a,b)} \left| \frac{d}{dt} \{ Q(t) S(j, h) (\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \} \right| \leq C_1/h. \quad (\text{A.46})$$

と評価できる。次に、仮定 $(f/Q) \in \mathbf{L}_\alpha(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ より、定数 $\tilde{C}$ が存在して

$$\left| \frac{f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))}{Q(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))} \right| \leq \tilde{C} |Q_{\alpha,\alpha}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))| = \frac{\tilde{C} \{(b-a)/2\}^{2\alpha}}{\cosh^{2\alpha}(\pi \sinh(jh)/2)} \leq \tilde{C} (b-a)^{2\alpha} e^{-\pi\alpha \sinh(|jh|)} \quad (\text{A.47})$$

が成り立つ。さらに、評価式 $\sinh(|jh|) \geq (e^{|jh|} - 1)/2$ を用いると、 $C_2 = \tilde{C} (b-a)^{2\alpha} e^{\frac{\pi}{2}\alpha}$ とおけば

$$\begin{aligned} \sum_{|j|>N} \left| \frac{f(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))}{Q(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(jh))} \right| &\leq C_2 \sum_{|j|>N} e^{-\frac{\pi}{2}\alpha \exp(|jh|)} \\ &= 2C_2 \sum_{j>N} e^{-\frac{\pi}{2}\alpha \exp(jh)} \\ &\leq 2C_2 \int_N^\infty e^{-\frac{\pi}{2}\alpha \exp(sh)} ds \\ &\leq 2C_2 \left\{ \frac{2}{\pi\alpha h e^{Nh}} \right\} \int_N^\infty \left\{ \frac{\pi\alpha h e^{sh}}{2} \right\} e^{-\frac{\pi}{2}\alpha \exp(sh)} ds \\ &= \frac{4C_2}{\pi\alpha h e^{Nh}} e^{-\frac{\pi}{2}\alpha \exp(Nh)} \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

と評価できる。不等式 (A.46) と (A.48) をあわせれば、式 (A.44) の評価が得られる。 ■

補題 A.23 と補題 A.24 より、定理 A.20 が得られる。以上で証明は完了した。

A.3 不定型畳み込みの近似公式

ここでは、式 (A.2) で表される不定型畳み込みに対する近似公式についてまとめる。ここでも、SE 変換を用いる公式と、DE 変換を用いる公式の二種類がある。SE 変換を用いる公式は Stenger [136] が提案したものであり、DE 変換を用いる公式は本論文によるものである。

A.3.1 準備：Sinc 関数と線形関数を基底関数とする不定積分公式

第 2 章では、不定積分 $\mathcal{J}f$ を式 (2.41) や式 (2.46) のように $J(j, h)$ を基底関数として近似する方法を説明したが、ここでは後に必要となる、 $S(j, h)$ と線形関数を基底関数として近似する方法を説明する。

SE 変換を用いる場合 (Stenger [136])

これまで通り、 M, N を自然数とし、 $m = M + N + 1$ とおく。関数 $g \in \mathbf{X}$ に対するサンプリング演算子 $V_m^{\text{SE}} : \mathbf{X} \rightarrow \mathbb{R}^m$ を

$$V_m^{\text{SE}} g = [g(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(-Mh)), \dots, g(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(Nh))]^\top \quad (\text{A.49})$$

で定め、また関数近似に用いる基底関数 $\boldsymbol{\omega}_m^{\text{SE}} = [\omega_{-M}^{\text{SE}}, \dots, \omega_N^{\text{SE}}]^\top$ を

$$\begin{aligned} \omega_{-M}^{\text{SE}}(t) &= (1 + \rho^{\text{SE}}(-Mh)) \\ &\times \left\{ \frac{1}{1 + \rho^{\text{SE}}(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t))} - \sum_{k=-M+1}^N \frac{1}{1 + \rho^{\text{SE}}(kh)} S(k, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

$$\omega_j^{\text{SE}}(t) = S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)), \quad (\text{A.51})$$

$$\omega_N^{\text{SE}}(t) = \frac{1 + \rho^{\text{SE}}(Nh)}{\rho^{\text{SE}}(Nh)} \left\{ \frac{\rho^{\text{SE}}(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t))}{1 + \rho^{\text{SE}}(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t))} - \sum_{k=-M}^{N-1} \frac{\rho^{\text{SE}}(kh)}{1 + \rho^{\text{SE}}(kh)} S(k, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}^{-1}(t)) \right\} \quad (\text{A.52})$$

と定義する。ただし $\rho^{\text{SE}}(t) = e^t$ である。ここで、 $\omega_j^{\text{SE}}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(ih)) = \delta_{ij}$ が成立することを注意しておく。この V_m^{SE} と $\boldsymbol{\omega}_m^{\text{SE}}$ を用いて、関数 g は $g \approx \boldsymbol{\omega}_m^{\text{SE}} V_m^{\text{SE}} g$ のように近似される。この近似法に対する誤差評価は次のように与えられている。

定理 A.25 (Stenger [136, Theorem 4.2]) $g \in \mathbf{M}_{\alpha, \beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ とする。このとき、 $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ とおき、自然数 n に対して刻み幅 h を式 (2.53) で定め、自然数 M と N を式 (2.54) で定めると、 n によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\|g - \boldsymbol{\omega}_m^{\text{SE}} V_m^{\text{SE}} g\|_{\mathbf{X}} \leq C \sqrt{n} e^{-\sqrt{\pi d \mu n}}. \quad (\text{A.53})$$

これは関数近似だが、次に不定積分 $\mathcal{J}g$ の近似法を説明する。 σ_k を

$$\sigma_k = \int_0^k \frac{\sin(\pi s)}{\pi s} ds \quad (\text{A.54})$$

とおき、 $m \times m$ 行列 $I_m^{(-1)}$ を

$$\left(I_m^{(-1)}\right)_{i,j} = \frac{1}{2} + \sigma_{i-j}, \quad i, j = -M, \dots, N \quad (\text{A.55})$$

で定義する^{*1}。加えて、関数 u に対し、 $m \times m$ の対角行列 $D_m^{\text{SE}}(u)$ を

$$D_m^{\text{SE}}(u) = \text{diag}[u(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(-Mh)), \dots, u(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(Nh))] \quad (\text{A.56})$$

で定義する。これらを用いて、 $m \times m$ 行列 J_m^{SE} を

$$J_m^{\text{SE}} = h I_m^{(-1)} D_m^{\text{SE}}(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}') \quad (\text{A.57})$$

と定義し、積分作用素 $\mathcal{J}$ を近似する $\mathcal{J}_m^{\text{SE}}$ を

$$\mathcal{J}_m^{\text{SE}} = \boldsymbol{\omega}_m^{\text{SE}} J_m^{\text{SE}} V_m^{\text{SE}} \quad (\text{A.58})$$

で定義する。近似 $\mathcal{J}g \approx \mathcal{J}_m^{\text{SE}} g$ に対する誤差は次のように解析されている。

^{*1} $I_m^{(-1)}$ における (-1) は積分作用を表したものである。1 階微分や 2 階微分をした際に現れる行列はそれぞれ $I_m^{(1)}$ や $I_m^{(2)}$ のように表現されている [135]。

定理 A.26 (Stenger [136, Theorem 4.9]) $gQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d))$ とする. このとき, $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ とおき, 自然数 n に対して刻み幅 h を式 (2.53) で定め, 自然数 M と N を式 (2.54) で定めると, n によらない定数 C が存在して, 次の評価が成り立つ:

$$\|\mathcal{J}g - \mathcal{J}_m^{\text{SE}}g\|_{\mathbf{X}} \leq C\sqrt{n}e^{-\sqrt{\pi d\mu n}}. \quad (\text{A.59})$$

DE 変換を用いる場合 (本論文)

上述の近似法は, DE 変換を用いる場合にも適用できる. 実際, Yamamoto [156] によって, 上述の近似法において SE 変換を DE 変換に取り替えたものが考えられている. ただし, 十分な効果を得る ($O(\exp(-cn/\log n))$ の収束を可能にする) にはその変更のみでは不十分であり, ρ^{SE} も変更する必要がある. 以下では DE 変換を用いる場合に適切な近似法を導出し, 誤差評価を与える.

関数 g に対するサンプリング演算子 V_m^{DE} を

$$V_m^{\text{DE}}g = [g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(-Mh)), \dots, g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(Nh))]^\top \quad (\text{A.60})$$

で定め, また関数近似に用いる基底関数 $\omega_m^{\text{DE}} = [\omega_{-M}^{\text{DE}}, \dots, \omega_N^{\text{DE}}]^\top$ を

$$\begin{aligned} \omega_{-M}^{\text{DE}}(t) &= (1 + \rho^{\text{DE}}(-Mh)) \\ &\times \left\{ \frac{1}{1 + \rho^{\text{DE}}(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t))} - \sum_{k=-M+1}^N \frac{1}{1 + \rho^{\text{DE}}(kh)} S(k, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

$$\omega_j^{\text{DE}}(t) = S(j, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)), \quad (\text{A.62})$$

$$\omega_N^{\text{DE}}(t) = \frac{1 + \rho^{\text{DE}}(Nh)}{\rho^{\text{DE}}(Nh)} \left\{ \frac{\rho^{\text{DE}}(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t))}{1 + \rho^{\text{DE}}(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t))} - \sum_{k=-M}^{N-1} \frac{\rho^{\text{DE}}(kh)}{1 + \rho^{\text{DE}}(kh)} S(k, h)(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(t)) \right\} \quad (\text{A.63})$$

と定義する. ただし $\rho^{\text{DE}}(t) = e^{\pi \sinh t}$ である. ここで, $\omega_j^{\text{DE}}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(ih)) = \delta_{ij}$ が成立することを注意しておく. この V_m^{DE} と ω_m^{DE} を用いて, 関数 g は $g \approx \omega_m^{\text{DE}} V_m^{\text{DE}}g$ のように近似される. この近似法に対する誤差は次のように評価される.

定理 A.27 $g \in \mathbf{M}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とする. このとき, $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ とおき, 自然数 n に対して刻み幅 h を式 (2.58) で定め, 自然数 M と N を式 (2.59) で定めると, n によらない定数 C が存在して, 次の評価が成り立つ:

$$\|g - \omega_m^{\text{DE}} V_m^{\text{DE}}g\|_{\mathbf{X}} \leq C e^{-\pi dn / \log(2dn/\mu)}. \quad (\text{A.64})$$

証明. 一般に関数 u に対する Sinc 関数近似の誤差を

$$E_{M,N}(u, h)(x) = u(x) - \sum_{k=-M}^N u(kh)S(k, h)(x) \quad (\text{A.65})$$

と表すことにする．また、以下では関数 F を、式 (2.73) で定義される $\mathcal{T}$ を用いて $G(x) = \mathcal{T}[g](\psi_{a,b}^{\text{DE}}(x))$ と定めておく．このとき、 g と $\omega_m^{\text{DE}} V_m^{\text{DE}} g$ の差は

$$\begin{aligned}
(g - \omega_m^{\text{DE}} V_m^{\text{DE}} g)(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(x)) &= E_{M-1,N-1}(G, \mathcal{D}_d)(x) \\
&\quad + \{g(a) - g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(-Mh))\} E_{M-1,N-1}\left(\frac{1}{1 + \rho^{\text{DE}}(x)}, \mathcal{D}_d\right)(x) \\
&\quad - g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(-Mh)) \rho^{\text{DE}}(-Mh) E_{M-1,N-1}\left(\frac{1}{1 + \rho^{\text{DE}}(x)}, \mathcal{D}_d\right)(x) \\
&\quad + \{g(b) - g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(Nh))\} E_{M-1,N-1}\left(\frac{\rho^{\text{DE}}(x)}{1 + \rho^{\text{DE}}(x)}, \mathcal{D}_d\right)(x) \\
&\quad - g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(Nh)) \frac{1}{\rho^{\text{DE}}(Nh)} E_{M-1,N-1}\left(\frac{\rho^{\text{DE}}(x)}{1 + \rho^{\text{DE}}(x)}, \mathcal{D}_d\right)(x) \\
&\quad + \frac{1 + \rho^{\text{DE}}(-Mh)}{1 + \rho^{\text{DE}}(Nh)} g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(-Mh)) \\
&\quad + \frac{\rho^{\text{DE}}(-Mh)}{1 + \rho^{\text{DE}}(-Mh)} \frac{1 + \rho^{\text{DE}}(Nh)}{\rho^{\text{DE}}(Nh)} g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(Nh)) \tag{A.66}
\end{aligned}$$

と表せる． $E_{M-1,N-1}(\cdot, \mathcal{D}_d)$ がいくつか現れているが、このうち収束するものは $E_{M-1,N-1}(G, \mathcal{D}_d)$ のみである．その他の項は増加の程度を評価し、係数が増加の程度よりもすみやかに 0 に収束することを示せば、それによって全体が収束することが示される．

先に $E_{M-1,N-1}$ の増大の程度を評価する．補題 5.12 より、

$$\begin{aligned}
\left| E_{M-1,N-1}\left(\frac{1}{1 + \rho^{\text{DE}}(x)}, \mathcal{D}_d\right) \right| &\leq \left| \frac{1}{1 + \rho^{\text{DE}}(x)} \right| + \sum_{k=-M+1}^{N-1} \frac{1}{1 + \rho^{\text{DE}}(kh)} |S(k, h)(x)| \\
&\leq 1 + \sum_{k=-M+1}^{N-1} |S(k, h)(x)| \\
&\leq 1 + \sum_{k=-n}^n |S(k, h)(x)| \\
&\leq 1 + \frac{2}{\pi} (3 + \log n) \tag{A.67}
\end{aligned}$$

となり、同様に

$$\left| E_{M-1,N-1}\left(\frac{\rho^{\text{DE}}(x)}{1 + \rho^{\text{DE}}(x)}, \mathcal{D}_d\right) \right| \leq 1 + \frac{2}{\pi} (3 + \log n) \tag{A.68}$$

が成り立つ．

次に、係数の収束性を順に示していく．仮定 $g \in \mathbf{M}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ により、ある定数 H が

存在して

$$\begin{aligned}
 |g(a) - g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(-Mh))| &\leq H|a - \psi_{a,b}^{\text{DE}}(-Mh)|^\alpha \\
 &= H \left| \frac{b-a}{1 + \rho^{\text{DE}}(-Mh)} \right|^\alpha \\
 &\leq H(b-a)^\alpha \{\rho^{\text{DE}}(-Mh)\}^\alpha,
 \end{aligned} \tag{A.69}$$

$$\begin{aligned}
 |g(b) - g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(Nh))| &\leq H|b - \psi_{a,b}^{\text{DE}}(Nh)|^\beta \\
 &= H \left| \frac{b-a}{1 + \rho^{\text{DE}}(Nh)} \right|^\beta \\
 &\leq H(b-a)^\alpha \{\rho^{\text{DE}}(-Nh)\}^\beta
 \end{aligned} \tag{A.70}$$

が成り立つ。また g は有界であるので、

$$|g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(-Mh))\rho^{\text{DE}}(-Mh)| \leq \|g\|_{\mathbf{x}} \rho^{\text{DE}}(-Mh), \tag{A.71}$$

$$\left| g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(-Mh)) \frac{1}{\rho^{\text{DE}}(Nh)} \right| \leq \|g\|_{\mathbf{x}} \rho^{\text{DE}}(-Nh), \tag{A.72}$$

$$\left| \frac{1 + \rho^{\text{DE}}(-Mh)}{1 + \rho^{\text{DE}}(Nh)} g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(-Mh)) \right| \leq \|g\|_{\mathbf{x}} \frac{1 + \rho^{\text{DE}}(-Mh)}{1 + \rho^{\text{DE}}(Nh)} \leq 2\|g\|_{\mathbf{x}} \rho^{\text{DE}}(-Nh), \tag{A.73}$$

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{\rho^{\text{DE}}(-Mh)}{1 + \rho^{\text{DE}}(-Mh)} \frac{1 + \rho^{\text{DE}}(Nh)}{\rho^{\text{DE}}(Nh)} g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(Nh)) \right| &\leq \|g\|_{\mathbf{x}} \frac{\rho^{\text{DE}}(-Mh)}{1 + \rho^{\text{DE}}(-Mh)} \frac{1 + \rho^{\text{DE}}(Nh)}{\rho^{\text{DE}}(Nh)} \\
 &\leq 2\|g\|_{\mathbf{x}} \rho^{\text{DE}}(-Mh)
 \end{aligned} \tag{A.74}$$

とそれぞれ評価できる。

最後に、 $E_{M-1,N-1}(G,h)(x)$ について考える。まず、

$$\begin{aligned}
 |E_{M-1,N-1}(G,h)(x)| &\leq |E_{M,N}(G,h)(x)| \\
 &\quad + |G(-Mh)||S(-M,h)(x)| + |G(Nh)||S(N,h)(x)|
 \end{aligned} \tag{A.75}$$

とした上で、各項を評価する。 $g \in \mathbf{M}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ より、 $G(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot)) \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ であるので、定理 2.21 より、ある正の定数 $\tilde{C}_G$ が存在して

$$|E_{M,N}(G,h)(x)| \leq \tilde{C}_G e^{-\pi dn / \log(\pi dn / \mu)} \tag{A.76}$$

が成り立つ。また同じく $G(\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}^{-1}(\cdot)) \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ より、ある定数 L によって

$$|G(x)| \leq L \left| \frac{b-a}{1 + \rho^{\text{DE}}(-x)} \right|^\alpha \left| \frac{b-a}{1 + \rho^{\text{DE}}(x)} \right|^\beta \tag{A.77}$$

と評価できるので、

$$|G(-Mh)||S(-M,h)(x)| \leq L(b-a)^{\alpha+\beta} \{\rho^{\text{DE}}(-Mh)\}^\alpha, \tag{A.78}$$

$$|G(Nh)||S(N,h)(x)| \leq L(b-a)^{\alpha+\beta} \{\rho^{\text{DE}}(-Nh)\}^\beta \tag{A.79}$$

が成り立つ。以上の評価の下で、式 (A.66) の右辺を評価すればよい。 h を代入した上で、 h, M, N の関係や $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ などに注意して評価すれば、望む評価式が得られる。 ■

これは関数近似だが、次に不定積分 $\mathcal{J}g$ の近似法を説明する。関数 u に対し、 $m \times m$ の対角行列 $D_m^{\text{DE}}(u)$ を

$$D_m^{\text{DE}}(u) = \text{diag}[u(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(-Mh)), \dots, u(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(Nh))] \quad (\text{A.80})$$

で定義する。これらを用いて、 $m \times m$ 行列 J_m^{DE} を

$$J_m^{\text{DE}} = hI_m^{(-1)} D_m^{\text{DE}} (\{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}') \quad (\text{A.81})$$

と定義し、積分作用素 $\mathcal{J}$ を近似する $\mathcal{J}_m^{\text{DE}}$ を

$$\mathcal{J}_m^{\text{DE}} = \omega_m^{\text{DE}} J_m^{\text{DE}} V_m^{\text{DE}} \quad (\text{A.82})$$

で定義する。近似 $\mathcal{J}g \approx \mathcal{J}_m^{\text{DE}} g$ に対する誤差解析を行うために、補題を二つ用意しておく。まず次の補題は簡単な計算により確かめることができる。

補題 A.28 $gQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とすると、 $\mathcal{J}g \in \mathbf{M}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ である。

また次の補題も補題 5.12 より直ちに示される。

補題 A.29 N によらない定数 C_ω が存在して、次の評価式が成り立つ：

$$\|\omega_m^{\text{DE}} V_m^{\text{DE}}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{X}, \mathbf{X})} \leq C_\omega \log(n+1) \quad (\text{A.83})$$

これらの補題より、次の定理が示せる。

定理 A.30 $gQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ とする。このとき、 $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ とおき、自然数 n に対して刻み幅 h を式 (2.58) で定め、自然数 M と N を式 (2.59) で定めると、 n によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\|\mathcal{J}g - \mathcal{J}_m^{\text{DE}} g\|_{\mathbf{X}} \leq C e^{-\pi dn / \log(2dn/\mu)} \quad (\text{A.84})$$

証明. 一般に関数 u に対して、Sinc 積分の離散化誤差を

$$e(u, h)(x) = \int_{-\infty}^x \left\{ u(t) - \sum_{j=-\infty}^{\infty} u(jh) S(j, h)(t) \right\} dt \quad (\text{A.85})$$

と表すことにする。また、以下では関数 G を $G(x) = g(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(x)) \{\psi_{a,b}^{\text{DE}}\}'(x)$ とおく。まず、

$$\begin{aligned} (\mathcal{J}g - \mathcal{J}_m^{\text{DE}} g)(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(x)) &= (\mathcal{J}g - \omega_m^{\text{DE}} V_m^{\text{DE}} \mathcal{J}g)(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(x)) + \omega_m^{\text{DE}} V_m^{\text{DE}} e(G, h)(x) \\ &\quad + \omega_m^{\text{DE}} V_m^{\text{DE}} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{-M-1} G(kh) J(k, h)(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} G(kh) J(k, h)(x) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

と変形できるので、これらの各項を評価する。 $gQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ より、補題 A.28 から、定理 A.27 を用いることができ、 n によらないある正の定数 $\tilde{C}_g$ によって、第一項は

$$\|\mathcal{J}g - \omega_m^{\text{DE}} V_m^{\text{DE}} \mathcal{J}g\|_{\mathbf{X}} \leq \tilde{C}_g e^{-\pi dn / \log(2dn/\mu)} \quad (\text{A.87})$$

と評価できる. また同じく $gQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ より, $G \in \mathbf{H}^1(\mathcal{D}_d)$ であるので, 定理 9.20 を用いることができ, 補題 A.29 と合わせて用いると, 第二項は

$$\|\omega_m^{\text{DE}} V_m^{\text{DE}} e(G, h)\|_{\mathbf{X}} \leq \|\omega_m^{\text{DE}} V_m^{\text{DE}}\|_{\mathbf{X}} \frac{hN_1(G, d)}{4d \sinh(\pi d/h)} \leq C_\omega \log(n+1) \frac{hN_1(G, d)}{4d \sinh(\pi d/h)} \quad (\text{A.88})$$

と評価できる. さらに, やはり $gQ \in \mathbf{L}_{\alpha,\beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d))$ より, 補題 9.28 と補題 A.29 を用いると, 第三項は

$$\begin{aligned} & \left| \omega_m^{\text{DE}} V_m^{\text{DE}} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{-M-1} G(kh) J(k, h)(x) + \sum_{k=N+1}^{\infty} G(kh) J(k, h)(x) \right\} \right| \\ & \leq C_\omega \log(n+1) (1.1h) e^{\frac{\pi}{2}\nu} \tilde{C}_1 e^{-\frac{\pi}{2}\mu \exp(nh)} \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

と評価できる. ただし $\nu = \max\{\alpha, \beta\}$ である. これらの評価に h を代入してまとめれば, 望む評価が得られる. ■

A.3.2 作用素を用いた不定型畳み込みの表式の導出 (Stenger [136])

ここでは, 不定型畳み込み

$$p(x) = \int_a^x f(x-t)g(t)dt, \quad a \leq x \leq b, \quad (\text{A.90})$$

を, 作用素 $\mathcal{J}$ を用いて表した式 (具体的には式 (A.114)) を説明する. 導出は Stenger [136, §3] による. これは後の近似公式を考える際に有用である.

まず, $\mathbf{Y} = L^1(a, b)$ とおき, 積分作用素 $\mathcal{J}$ を $\mathcal{J} : \mathbf{Y} \rightarrow \mathbf{Y}$ として, $w \in \mathbf{Y}$ に対して

$$(\mathcal{J}w)(x) = \int_a^x w(t)dt \quad (\text{A.91})$$

と定義されるものとする (変数を変えただけで, 式 (2.40) と同一である). 自然数 n に対し, w の n 階積分は,

$$(\mathcal{J}^n w)(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} w(t)dt \quad (\text{A.92})$$

となることが容易に確かめられる. $w \in Y$ のノルムを

$$\|w\|_{\mathbf{Y}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b |w(t)|dt \quad (\text{A.93})$$

で定めると,

$$\|\mathcal{J}w\|_{\mathbf{Y}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left| \int_a^x w(t)dt \right| dx \leq (b-a) \|w\|_{\mathbf{Y}} \quad (\text{A.94})$$

より, 式 (A.92) と合わせて

$$\|\mathcal{J}^n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})} \leq \frac{(b-a)^n}{n!}, \quad (\text{A.95})$$

$$\|\mathcal{J}^n\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})} \leq \|\mathcal{J}\|_{\mathcal{L}(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})}^n \leq (b-a)^n \quad (\text{A.96})$$

が成り立つ. このノルムに関して $\mathbf{Y}$ は Banach 空間となる.

ここで, 今後通して使う, Laplace 変換と, 鉤括弧付きの「Laplace 変換」について定義する. まず関数 f に対する Laplace 変換を, ここでは

$$\hat{f}(s) = \int_0^c e^{-st} f(t) dt, \quad c \in [b-a, \infty] \quad (\text{A.97})$$

と定義する. 通常用いられる Laplace 変換では $c = \infty$ であるが, $c = \infty$ とするとき, $f(t) = t^{-1/3} \exp(t^2)$ のような関数では Laplace 変換が存在しないため困る. そもそも $p(x)$ の形を考えると, f の変数は $[0, b-a]$ 上のみを動くので, ある $c \in [b-a, \infty]$ に対して

$$f_c(x) = \begin{cases} f(x) & x \in [0, c] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (\text{A.98})$$

を f の代わりに考えてもさしつかえない. この際, 通常の Laplace 変換は, $c \in [b-a, \infty]$ ならば

$$\mathcal{L}[f_c](s) = \int_0^\infty e^{-st} f_c(t) dt = \hat{f}(s) \quad (\text{A.99})$$

が成り立つ. そのため, この $\hat{f}(s)$ を考えておけばよい.

次に, 鉤括弧付きの「Laplace 変換」を,

$$F(s) = \hat{f}(1/s) = \int_0^c e^{-t/s} f(t) dt \quad (\text{A.100})$$

で定義する. 以下においては, $c \in [b-a, \infty]$ を満たすある c があって, 任意の $s \in \Omega^+$ に対しこの「Laplace 変換」が存在すると仮定する. ただし $\Omega^+ = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ である.

今なされた仮定より $\operatorname{Re} s > 0$ では $\hat{f}(s)$ が存在することに注意すると, $\hat{f}(s)$ の極は $\operatorname{Re} s \leq 0$ の範囲に存在することになるので, $\hat{f}(s)$ の逆 Laplace 変換は,

$$f_c(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{0-i\infty}^{0+i\infty} e^{st} \mathcal{L}[f_c](s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{st} \hat{f}(s) ds \quad (\text{A.101})$$

とかくことができる. 特に $0 \leq t \leq c$ では $f_c(t) = f(t)$ であるので, この場合には

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{st} \hat{f}(s) ds \quad (\text{A.102})$$

が成り立つ. これを $F(s)$ を用いてかくと, $0 \leq t \leq c$ のとき

$$f(t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{t/s} F(s) s^{-2} ds \quad (\text{A.103})$$

と表される.

さて, これを用いて $p(x)$ を変形する. まず, 式 (A.103) を代入すると,

$$\begin{aligned} p(x) &= \int_a^x f(x-t) g(t) dt \\ &= - \int_a^x \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} e^{(x-t)/s} F(s) s^{-2} ds g(t) dt \end{aligned} \quad (\text{A.104})$$

である。さらに、 g を $g \in \mathbf{Y}$ として考えることにすると、

$$w(x, s) = \int_a^x s^{-2} e^{(x-t)/s} F(s) g(t) dt \quad (\text{A.105})$$

で定義する $w(x, s)$ が存在する（積分が有限確定値を持つ）ので、 $p(x)$ において積分の順序を交換して、

$$p(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} w(x, s) ds \quad (\text{A.106})$$

が成り立つ。

今、 $|s| > b - a$ とする。このとき、指数関数の級数展開と式 (A.92) を用いると、

$$\begin{aligned} w(x, s) &= \int_a^x s^{-2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-t)^n}{n! s^n} F(s) g(t) dt \\ &= \left(\frac{\mathcal{J}}{s^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathcal{J}^n}{s^n} F(s) g \right) (x) \end{aligned} \quad (\text{A.107})$$

となり、さらに同じく $|s| > b - a$ と式 (A.96) よりこの Neumann 級数は収束して、

$$w(x, s) = \left(\frac{\mathcal{J}}{s} (s - \mathcal{J})^{-1} F(s) g \right) (x) \quad (\text{A.108})$$

と表すことができる。

この式 (A.108) は、実は $|s| > b - a$ だけでなく、左半平面 $\operatorname{Re} s < 0$ においても成立することがわかる。それをここで示しておく。まず、集合 $\{s \in \mathbb{C} : (s - \mathcal{J})^{-1} \text{が存在}\}$ を $\mathcal{J}$ のリゾルベント集合と呼ぶ。 $\mathcal{J}$ は Banach 空間 $\mathbf{Y}$ 上のコンパクトな線形作用素であるので、Fredholm の択一定理より、 $(s - \mathcal{J})$ が単射であることと全射であることが同値であり、すなわち $(s - \mathcal{J})$ が単射であることと $(s - \mathcal{J})^{-1}$ が存在することは同値である。よって、恒等的に 0 でない u に対し、 $(s - \mathcal{J})u \neq 0$ と $(s - \mathcal{J})^{-1}$ が存在することは同値。

ここで、 (u, v) を

$$(u, v) = \int_a^b u(x) \overline{v(x)} dx \quad (\text{A.109})$$

で定義し、 $\operatorname{Re}(\mathcal{J}u, u)$ を考えると、

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\mathcal{J}u, u) &= \frac{1}{2} \left\{ \int_a^b \left(\int_a^x u(t) dt \right) \overline{u(x)} dx + \int_a^b \left(\int_a^x \overline{u(t)} dt \right) u(x) dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_a^b \left(\int_a^x u(t) dt \right) \overline{u(x)} dx + \int_a^b \left(\int_t^b u(x) dx \right) \overline{u(t)} dt \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_a^b \left(\int_a^x u(t) dt \right) \overline{u(x)} dx + \int_a^b \left(\int_x^b u(t) dt \right) \overline{u(x)} dx \right\} \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b u(t) \overline{u(x)} dt dx = \frac{1}{2} \left| \int_a^b u(x) dx \right|^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{A.110})$$

となることがわかるので、 $\operatorname{Re} s < 0$ のとき $(\mathcal{J}u, u) \neq s(u, u)$ となる。よってこのとき $\mathcal{J}u \neq su$ となり、結局 $\operatorname{Re} s < 0$ ならば $(s - \mathcal{J})^{-1}$ が存在することが示された。したがって、 $\mathcal{J}$ のリゾルベント集合は、 $\{s \in \mathbb{C} : |s| > b - a\}$ だけでなく $\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} s < 0\}$ も含むことがわかる。

式 (A.106) に戻ると、このとき積分変数は $\operatorname{Re} s = 0$ であるため、 $(s - \mathcal{J})^{-1}$ が存在しない場合がある。そのため、式 (A.108) を式 (A.106) に代入する際には

$$p(x) = - \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\mathcal{J}}{s - \epsilon} (s - \epsilon - \mathcal{J})^{-1} F(s) ds g \right\} (x) \quad (\text{A.111})$$

のようにする。ここで、区間 (a, b) が有限ならば、 $|F(\infty)| = |\hat{f}(0)| = |\int_0^c f(t) dt| < \infty$ となるような有限の $c < \infty$ がとれるので、被積分関数は $s \rightarrow \infty$ で 0 となる。よって図 A.1 のように、スペクトル (リゾルベント集合の補集合) の存在可能領域を左まわりに囲む積分路 Γ を考えれば、

$$p(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \left\{ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{\mathcal{J}}{s - \epsilon} (s - \epsilon - \mathcal{J})^{-1} F(s) ds g \right\} (x) \quad (\text{A.112})$$

が成り立つ。 $F(s)$ が Ω^+ 上解析関数であるとき、この積分は Dunford 積分として考えることができる。 $F(s)$ は $\operatorname{Re} s > 0$ に極を持たないので、Cauchy の積分定理より

$$p(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0+} \{(-F(\epsilon) + F(\epsilon + \mathcal{J}))g\}(x) = \{(-F(0) + F(\mathcal{J}))g\}(x) \quad (\text{A.113})$$

が成り立つ。さらに、 $s \rightarrow \infty$ のとき $\hat{f}(s) = \int_0^c e^{-st} f(t) dt \rightarrow 0$ より $F(0) = \hat{f}(\infty) = 0$ であるので、結局 $p(x)$ は

$$p(x) = (F(\mathcal{J})g)(x) \quad (\text{A.114})$$

とかけることがわかる。この表式を導くのがここでの目標であった。

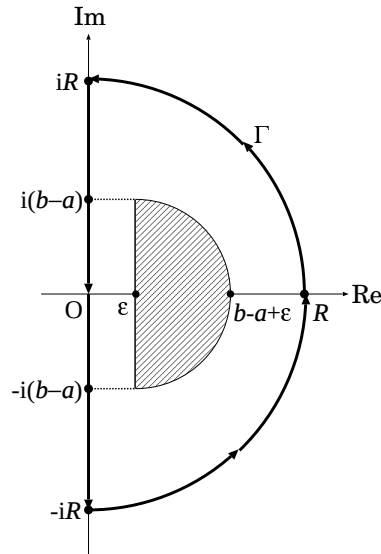


図 A.1 複素積分の積分路 Γ .

A.3.3 近似公式の導出とその誤差解析結果

SE 変換を用いる場合 (Stenger [136])

式 (A.114) で $F(\mathcal{J})$ を用いた表式を得たが, $F(\mathcal{J})$ に対し $F(\mathcal{J}_m^{\text{SE}})$ を

$$F(\mathcal{J}_m^{\text{SE}}) = \omega_m^{\text{SE}} F(J_m^{\text{SE}}) V_m^{\text{SE}} \quad (\text{A.115})$$

と定義する ($V_m^{\text{SE}} \omega_m^{\text{SE}}$ は単位行列となることに注意). これによって $p(x)$ を

$$p(x) = (F(\mathcal{J})g)(x) \approx (F(\mathcal{J}_m^{\text{SE}})g)(x) = (\omega_m^{\text{SE}} F(J_m^{\text{SE}}) V_m^{\text{SE}} g)(x) \quad (\text{A.116})$$

のように近似することを考える. ここで, $F(J_m^{\text{SE}})$ は, 行列 J_m^{SE} が m 個の固有値 $\lambda_{-M}, \dots, \lambda_N$ を持ち, ある正則な X_m によって $J_m^{\text{SE}} = X_m \text{diag}[\lambda_{-M}, \dots, \lambda_N] X_m^{-1}$ と対角化されるとして,

$$F(J_m^{\text{SE}}) = X_m \text{diag}[F(\lambda_{-M}), \dots, F(\lambda_N)] X_m^{-1} \quad (\text{A.117})$$

で定義する. したがって, 行列 J_m^{SE} が対角化可能であることが仮定として必要となり, かつ $F(s)$ が必ず存在するのは $\text{Re } s > 0$ のときであったため, J_m^{SE} の固有値の実部が正である必要もある.

ただし, J_m^{SE} の固有値の実部は 0 以上であることを示すことができる. $J_m^{\text{SE}} = h I_m^{(-1)} D(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}')$ より, まず $I_m^{(-1)}$ を考えると, 全ての要素が $1/2$ である行列 H_m と (i, j) 成分が σ_{i-j} である行列 S_m を用いて, $I_m^{(-1)} = H_m + S_m$ と表される. 任意の m 次元複素数ベクトル $\mathbf{c} = (c_{-M}, \dots, c_N)^\top$ に対し,

$$\mathbf{c}^* I_m^{(-1)} \mathbf{c} = \frac{1}{2} \left| \sum_{j=-M}^N c_j \right|^2 + \mathbf{c}^* S_m \mathbf{c} \quad (\text{A.118})$$

が成り立つ. S_m は反対称行列であるので $\mathbf{c}^* S_m \mathbf{c}$ の項は純虚数であることより, $I_m^{(-1)}$ の固有値の実部は非負であることがわかる. 加えて, $h > 0$ と $D(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}')$ の対角成分の正值性に注意すると, $D(\{\psi_{a,b}^{\text{SE}}\}')$ を簡単に D とかけば

$$\mathbf{c}^* D^{1/2} J_m^{\text{SE}} D^{-1/2} \mathbf{c} = h \mathbf{c}^* D^{1/2} I_m^{(-1)} D^{1/2} \mathbf{c} = \frac{h}{2} \left| \sum_{j=-M}^N c_j d_j \right|^2 + h \mathbf{c}^* D^{1/2} S_m D^{1/2} \mathbf{c} \quad (\text{A.119})$$

より, $D^{1/2} J_m^{\text{SE}} D^{-1/2}$ の固有値の実部は非負であることがわかり, J_m^{SE} の固有値は $D^{1/2} J_m^{\text{SE}} D^{-1/2}$ の固有値と等しいので, 結局 J_m^{SE} の固有値の実部は非負である.

今回仮定するのは J_m^{SE} の固有値の実部が真に正である, ということであるので, 現実とかけ離れた仮定ではないことを注意しておく. また実際, $m = 1, 2, \dots, 1000$ において, $I_m^{(-1)}$ の固有値の実部は正であることが数値計算により確認されている [4].

近似式 (A.116) の誤差評価にあたって,

$$P(r, \tau) = \int_a^\tau f(r + \tau - \eta) g(\eta) d\eta \quad (\text{A.120})$$

とおき、次のようなことを仮定する。

仮定 A.31 c は $c \geq 2(b-a)$ をみたす定数とし、 α と β は $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1$ をみたす定数、 $\alpha', \beta', \epsilon$ は正の定数とする。任意の $r \in [0, b-a]$ に対して、一様に $P(r, \cdot) \in \mathbf{M}_{\alpha, \beta}(\psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_{d+\epsilon}))$ が成り立ち、さらにある定数 C が存在して、

$$\left| \{\psi_{0,c}^{\text{SE}}\}'(r) \frac{\partial}{\partial r} \{P(r, \tau)\} \right| \leq C \frac{1}{(1 + e^{-r})^\alpha (1 + e^r)^\beta} \quad (\text{A.121})$$

が任意の $r \in [0, b-a]$ と $\tau \in \psi_{a,b}^{\text{SE}}(\mathcal{D}_d)$ に対して成り立つとする。加えて、行列 J_m^{SE} は対角化可能で、かつその固有値の実部は全て正であるとする。

この仮定の下で、次のような誤差評価が与えられている。

定理 A.32 (Stenger [136, Theorem 4.13]) 仮定 A.31 が成り立つとする。このとき、 $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ とおき、自然数 n に対して刻み幅 h を式 (2.53) で定め、自然数 M と N を式 (2.54) で定めると、 n によらない定数 C が存在して、次の評価が成り立つ：

$$\|p - F(\mathcal{J}_m^{\text{SE}})g\|_{\mathbf{X}} \leq C\sqrt{n}e^{-\sqrt{\pi d\mu n}}. \quad (\text{A.122})$$

DE 変換を用いる場合 (本論文)

上述の近似法は、DE 変換を用いる場合にも適用できる。 $F(\mathcal{J})$ に対し $F(\mathcal{J}_m^{\text{DE}})$ を

$$F(\mathcal{J}_m^{\text{DE}}) = \omega_m^{\text{DE}} F(J_m^{\text{DE}}) V_m^{\text{DE}} \quad (\text{A.123})$$

と定義する ($V_m^{\text{DE}} \omega_m^{\text{DE}}$ は単位行列となることに注意)。これによって $p(x)$ を

$$p(x) = (F(\mathcal{J})g)(x) \approx (F(\mathcal{J}_m^{\text{DE}})g)(x) = (\omega_m^{\text{DE}} F(J_m^{\text{DE}}) V_m^{\text{DE}} g)(x) \quad (\text{A.124})$$

のように近似することを考える。ここで、 $F(J_m^{\text{DE}})$ は、行列 J_m^{DE} が m 個の固有値 $\lambda_{-M}, \dots, \lambda_N$ を持ち、ある正則な X_m によって $J_m^{\text{DE}} = X_m \text{diag}[\lambda_{-M}, \dots, \lambda_N] X_m^{-1}$ と対角化されるとして、

$$F(J_m^{\text{DE}}) = X_m \text{diag}[F(\lambda_{-M}), \dots, F(\lambda_N)] X_m^{-1} \quad (\text{A.125})$$

で定義する。したがって、行列 J_m^{DE} が対角化可能であることが仮定として必要となり、かつ $F(s)$ が必ず存在するのは $\text{Re } s > 0$ のときであったため、 J_m^{DE} の固有値の実部が正であることが仮定される (ただし、SE 変換の場合と同様に、 J_m^{DE} の固有値の実部は 0 以上であることを示すことができる)。

近似式 (A.124) の誤差評価にあたって、次のようなことを仮定する。

仮定 A.33 c は $c \geq 2(b-a)$ をみたす定数とし、 α と β は $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1$ をみたす定数、 $\alpha', \beta', \epsilon$ は正の定数とする。任意の $r \in [0, b-a]$ に対して、一様に $P(r, \cdot) \in \mathbf{M}_{\alpha, \beta}(\psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_{d+\epsilon}))$ が成り立ち、さらにある定数 C が存在して、

$$\left| \{\psi_{0,c}^{\text{DE}}\}'(r) \frac{\partial}{\partial r} \{P(r, \tau)\} \right| \leq C \frac{\cosh(r)}{(1 + e^{-\pi \sinh r})^\alpha (1 + e^{\pi \sinh r})^\beta} \quad (\text{A.126})$$

が任意の $r \in [0, b - a]$ と $\tau \in \psi_{a,b}^{\text{DE}}(\mathcal{D}_d)$ に対して成り立つとする．加えて，行列 J_m^{DE} は対角化可能で，かつその固有値の実部は全て正であるとする．

この仮定の下で，近似式 (A.124) の誤差は次のように評価される．

定理 A.34 (岡山ら [92, 定理 3.1]) 仮定 A.33 が成り立つとする．このとき， $\mu = \min\{\alpha, \beta\}$ とおき，自然数 n に対して刻み幅 h を式 (2.58) で定め，自然数 M と N を式 (2.59) で定めると， n によらない定数 C が存在して，次の評価が成り立つ：

$$\|p - F(\mathcal{J}_m^{\text{DE}})g\|_{\mathbf{x}} \leq C e^{-\pi dn / \log(2dn/\mu)}. \quad (\text{A.127})$$